Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO
TRAPEZ
Nr 24 (24/2015)
Piątek, 11 września 2015 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **225**, **226**, **227** i **228** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

225. Zapisz liczbę 13 używając cyfr 1, 4 i 5. Podaj cztery istotnie różne rozwiązania.

226. Zapisz liczbę 35 używając cyfr 1, 4 i 5 (każdej tylko raz).

227. Zapisz liczbę 39 używając cyfr 1, 4 i 5 (każdej tylko raz).

Facebookowy konkurs Trapezu – Zadanie Tygodnia

228. Zapisz liczbę 2002 używając cyfr 1, 4, 5 i 9 (każdej tylko raz).

Nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną

Przypomnijmy, że średnią geometryczną liczb rzeczywistych dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nazywamy liczbę $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$, natomiast średnią arytmetyczną dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nazywamy liczbę $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$.

Rozpoczynamy cykl zadań dotyczących ogólnie znanej nierówności między tymi średnimi, którą możemy sformułować następująco:

Dla dowolnej liczby naturalnej n oraz dowolnych liczb rzeczywistych nieujemnych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zachodzi nierówność

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqslant \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\,. \tag{1}$$

W powyższej nierówności równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są równe.

Należy zwrócić uwagę, że jeżeli co najmniej jedna z liczb nieujemnych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jest równa 0, nierówność (1) jest spełniona w oczywisty sposób, jednak jej lewej strony nie będziemy nazywać średnią geometryczną tych liczb.

229. Rozważamy wszystkie prostokąty o ustalonym obwodzie. Wykaż, że pole prostokąta jest tym większe, im mniejsza jest różnica długości jego boków. Zapewne bez trudu rozwiążesz to zadanie pisząc odpowiednie wzorki. Postaraj się jednak rozwiązać je w sposób czysto geometryczny.

230. Wykaż, że $2010\cdot 2013\cdot 2019 < 2011\cdot 2014\cdot 2017$.

231. Udowodnij nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną dla czterech liczb $(n=4)$.

232. Udowodnij nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną dla trzech liczb $(n=3)$.

Rozwiązania zadań 220–224

220. $625=\frac{5^5}{5}=5\cdot(5!+5)=\sqrt{\sqrt{5\cdot\sqrt{\sqrt{\sqrt{5^{5!}}}}}}$

221. $108=5!-\sqrt{\frac{(3!)!}{5}}$

222. Warunki zadania można zapisać w postaci równości $\binom{n}{4}=1001$, gdzie n jest liczbą dodatków dostępnych w pizzerii. Równość ta jest spełniona dla $n=14$.

Uwaga: Równanie $\binom{n}{4}=k$ dla przypadkowo wybranej liczby całkowitej dodatniej k na ogół nie ma rozwiązania całkowitego n.

223. $449=\sqrt{8!\cdot 5+1}$

224. Zauważmy, że liczba $f(9)$ jest parzysta, a ponadto $6\leqslant f(9)\leqslant 8$, skąd $3\leqslant f(3)\leqslant 4$. Gdyby było $f(3)=4$, mielibyśmy $f(10)=f(15)=8$, a to stałoby w sprzeczności z nierównością $f(2)=2<4=f(3)$. Zatem $f(3)=3$, co po uzupełnieniu tabelki zgodnie z warunkiem **2**° prowadzi do sytuacji przedstawionej w Tabeli 1. Z kolei warunek $f(25)\geqslant f(24)=9$ w połączeniu z $f(5)\leqslant f(6)=5$ daje $f(5)=5$. Wobec tego otrzymujemy wartości funkcji f przedstawione w Tabeli 2 (przy okazji uzupełniliśmy wartość $f(17)=8$).

Tabela 1

n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$
2	2	**11**		**20**	
3	3	**12**	7	**21**	
4	4	**13**		**22**	
5		**14**		**23**	
6	5	**15**		**24**	9
7		**16**	8	**25**	
8	6	**17**		**26**	
9	6	**18**	8		
10		**19**			

Tabela 2

n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$
2	2	**11**		**20**	9
3	3	**12**	7	**21**	
4	4	**13**		**22**	
5	5	**14**		**23**	
6	5	**15**	8	**24**	9
7		**16**	8	**25**	10
8	6	**17**	8	**26**	
9	6	**18**	8		
10	7	**19**			

Uzupełnienie wartości $f(21)=f(22)=f(23)=9$ prowadzi do sytuacji przedstawionej w Tabeli 3, skąd już krok do uzyskania kompletnego rozwiązania (Tabela 4).

Tabela 3

n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$
2	2	**11**	7	**20**	9
3	3	**12**	7	**21**	9
4	4	**13**		**22**	9
5	5	**14**	8	**23**	9
6	5	**15**	8	**24**	9
7	6	**16**	8	**25**	10
8	6	**17**	8	**26**	
9	6	**18**	8		
10	7	**19**			

Tabela 4

n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$
2	2	**11**	7	**20**	9
3	3	**12**	7	**21**	9
4	4	**13**	8	**22**	9
5	5	**14**	8	**23**	9
6	5	**15**	8	**24**	9
7	6	**16**	8	**25**	10
8	6	**17**	8	**26**	10
9	6	**18**	8		
10	7	**19**	8		

Należy zwrócić uwagę, że warunek **3**° został użyty tylko raz, a mianowicie do określenia wartości $f(19)$.