Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 25 (25/2015)

Piątek, 18 września 2015 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **233**, **234** i **235** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

233. Zapisz liczbę 20 używając trzykrotnie cyfry 9.

234. Zapisz liczbę 63 używając trzykrotnie cyfry 9.

235. Zapisz liczbę 64 używając trzykrotnie cyfry 9.

Nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną

236. Rozważamy wszystkie prostopadłościany o ustalonym polu powierzchni. Wykaż, że największą objętość ma sześcian.

237. Udowodnij, że $\sqrt[3]{2} < 1,26$.

238. Wykaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej x zachodzi nierówność

$$\frac{x}{x^5+4} \leqslant \frac{1}{5}\,.$$

Uzupełnianka pseudologarytmiczna II

239. Uzupełnij tabelkę wartości funkcji f takimi liczbami naturalnymi, aby spełnione były następujące warunki:
1° W zakresie tabelki f jest niemalejąca, czyli $f(n) \leqslant f(n+1)$ dla $n=2$, 3, 4, …48.
2° Dla dowolnych liczb naturalnych m, n większych od 1 o iloczynie nie większym od 49 zachodzi równość $f(mn)=f(m)+f(n)$.
3° Przy zachowaniu warunków **1°** i **2°** suma liczb wpisanych w tabelkę jest możliwie najmniejsza.

n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$
2	3	**10**		**18**		**26**		**34**		**42**	
3		**11**		**19**		**27**		**35**		**43**	
4	6	**12**		**20**		**28**		**36**		**44**	
5		**13**		**21**		**29**		**37**		**45**	
6		**14**		**22**		**30**		**38**		**46**	
7		**15**		**23**		**31**		**39**		**47**	
8	9	**16**	12	**24**		**32**	15	**40**		**48**	
9		**17**		**25**		**33**		**41**		**49**	

Facebookowy konkurs Trapezu – Zadanie Tygodnia

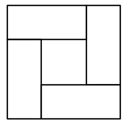
Rozwiąż zadanie **239** i podaj w odpowiedzi liczby $f(13)$, $f(33)$ i $f(41)$.

Rozwiązania zadań 225–232

225. $13 = 4! - \sqrt{5!+1} = \sqrt{5!+4!}+1 = \sqrt{4}+\sqrt{5!+1} = 15-\sqrt{4}$

226. $35 = 4! + \sqrt{5!+1}$ **227.** $39 = 4! + 15$ **228.** $2002 = \dfrac{14!}{5!\cdot 9!}$

229. Geometryczne rozwiązanie zadania wynika z konfiguracji przedstawionej na rysunku 1. Widzimy tam duży kwadrat o boku równym połowie obwodu prostokąta, podzielony na 4 przystające prostokąty i kwadrat o boku równym różnicy długości boków prostokąta. Przy ustalonym obwodzie prostokąta, duży kwadrat ma stałe pole, a mały kwadrat ma pole tym większe, im większa jest różnica boków prostokąta. W konsekwencji każdy z czterech przystających prostokątów ma tym większe pole, im mniejsza jest różnica długości jego boków.


rys. 1

Algebraiczne sformułowanie udowodnionego faktu jest następujące: *Iloczyn dwóch liczb dodatnich o ustalonej sumie jest tym większy, im mniejsza jest różnica tych liczb.* Nietrudno wykazać, że warunek dodatniości liczb jest w tym sformułowaniu nieistotny.

230. Ponieważ iloczyn dwóch liczb dodatnich o ustalonej sumie jest tym większy, im mniejsza jest różnica tych liczb, otrzymujemy:

$$2010\cdot 2013\cdot 2019 < 2011\cdot 2012\cdot 2019 < 2011\cdot 2014\cdot 2017\,.$$

231. Niech dane będą cztery liczby rzeczywiste nieujemne a_1, a_2, a_3, a_4. Stosując trzykrotnie nierówność między średnimi dla dwóch liczb otrzymujemy

$$\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4} = \sqrt{\sqrt{a_1a_2}\cdot\sqrt{a_3a_4}} \leqslant \sqrt{\frac{a_1+a_2}{2}\cdot\frac{a_3+a_4}{2}} \leqslant \frac{\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_3+a_4}{2}}{2} = \frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\,.$$

232. *Sposób I:* Niech dane będą trzy liczby rzeczywiste nieujemne a_1, a_2, a_3, gdzie bez szkody dla ogólności rozumowania możemy założyć, że $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3$. Oznaczmy przez A średnią arytmetyczną tych liczb. Wówczas $a_1 \leqslant A$ oraz $a_3 \geqslant A$. Przyjmijmy $b_1 = a_1 + a_3 - A$, $b_2 = a_2$ i $b_3 = A$. Wtedy $b_1 + b_3 = a_1 + a_3$ oraz

$$|b_3 - b_1| = |2\cdot A - a_1 - a_3| = |(A-a_1)+(A-a_3)| \leqslant |A-a_1| + |A-a_3| =$$
$$= (A-a_1)+(a_3-A) = a_3 - a_1,$$

skąd $a_1a_3 \leqslant b_1b_3$, gdyż iloczyn dwóch liczb o stałej sumie jest tym mniejszy, im większa jest różnica między tymi liczbami.

Ponieważ z nierówności między średnimi dla dwóch liczb wynika nierówność

$$\sqrt{b_1b_2} \leqslant \frac{b_1+b_2}{2} = \frac{(a_1+a_3-A)+a_2}{2} = \frac{a_1+a_2+a_3-A}{2} = \frac{3\cdot A - A}{2} = A\,,$$

otrzymujemy

$$a_1a_2a_3 \leqslant b_1b_2b_3 \leqslant A^3, \quad \text{czyli} \quad \sqrt[3]{a_1a_2a_3} \leqslant A = \frac{a_1+a_2+a_3}{3}\,.$$

Sposób II: Niech dane będą trzy liczby rzeczywiste nieujemne a_1, a_2, a_3. Przyjmijmy $a_4 = \sqrt[3]{a_1a_2a_3}$. Wówczas korzystając z udowodnionej w poprzednim zadaniu nierówności między średnimi dla czterech liczb, otrzymujemy

$$\sqrt[3]{a_1a_2a_3} = \frac{4}{3}\cdot\sqrt[3]{a_1a_2a_3} - \frac{a_4}{3} = \frac{4}{3}\cdot\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4} - \frac{a_4}{3} \leqslant \frac{4}{3}\cdot\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} - \frac{a_4}{3} = \frac{a_1+a_2+a_3}{3}\,.$$