Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 26 (26/2015)

Piątek, 25 września 2015 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **240**, **241**, **242** i **243** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

240. Zapisz liczbę 71 używając trzykrotnie cyfry 9.

241. Zapisz liczbę 75 używając trzykrotnie cyfry 9.

242. Zapisz liczbę 84 używając trzykrotnie cyfry 9. Podaj dwa istotnie różne rozwiązania.

Facebookowy konkurs Trapezu – Zadanie Tygodnia

243. Zapisz jak najmniejszą liczbę całkowitą większą od 1000 używając trzykrotnie cyfry 9. Przez *jak najmniejszą* rozumiemy *najmniejszą spośród liczb zapisanych przez uczestników konkursu.* Tym razem osoby biorące udział w konkursie mogą odpowiadać wielokrotnie.

Nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną

244. Udowodnij, że $1999! < 10^{6000}$.

245. Udowodnij, że $\sqrt[3]{2} > 1,2598$.

246. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich x, y zachodzi nierówność

$$\frac{xy}{x^2+2y^2} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{4}\,.$$

Dla których liczb zachodzi równość?

Rozwiązania zadań 233–239

233. $20 = \dfrac{\left(\left(\sqrt{9}\right)!\right)!}{\left(\sqrt{9}\right)!\cdot\left(\sqrt{9}\right)!}$ **234.** $63 = 9+9\cdot\left(\sqrt{9}\right)!$ **235.** $64 = \left(\dfrac{\left(\sqrt{9}\right)!}{\sqrt{9}}\right)^{\left(\sqrt{9}\right)!}$

236. Niech a, b, c będą długościami krawędzi prostopadłościanu o ustalonym polu powierzchni $S = 2\cdot(ab+bc+ca)$. Wówczas na mocy nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną objętość tego prostopadłościanu można oszacować następująco:

$$abc = \sqrt{ab\cdot bc\cdot ca} = \left(\sqrt[3]{ab\cdot bc\cdot ca}\right)^{3/2} \leqslant \left(\frac{ab+bc+ca}{3}\right)^{3/2} = \left(\frac{S}{6}\right)^{3/2},$$

gdzie równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $ab = bc = ca$, czyli w przypadku, gdy prostopadłościan jest sześcianem.

237. *Sposób I:* Na mocy nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną liczb 1,25, 1,25 i 1,28 otrzymujemy

$$\sqrt[3]{1,25\cdot 1,25\cdot 1,28} < \frac{1,25+1,25+1,28}{3}\,.$$

Upraszczając występujące wyżej wyrażenia dostajemy

$$1,25\cdot 1,25\cdot 1,28 = \frac{5}{2^2}\cdot\frac{5}{2^2}\cdot\frac{2^5}{5^2} = \frac{5^2\cdot 2^5}{2^4\cdot 5^2} = 2$$

oraz

$$\frac{1,25+1,25+1,28}{3} = \frac{1,25+1,25+(1,25+0,03)}{3} =$$

$$=\frac{1,25+1,25+1,25}{3}+\frac{0,03}{3}=1,25+0,01=1,26\,,$$

skąd $\sqrt[3]{2}<1,26$.

Sposób II: Udowodnimy, że $\sqrt[3]{2}-1,25<0,01$.

Stosując wzór na różnicę sześcianów i wykorzystując nierówność $\sqrt[3]{2}>5/4$ otrzymujemy

$$\sqrt[3]{2}-\frac{5}{4}=\frac{2-\frac{125}{64}}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}\cdot\frac{5}{4}+\frac{25}{16}}<\frac{\frac{3}{64}}{\frac{25}{16}+\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{4}+\frac{25}{16}}=\frac{\frac{3}{64}}{3\cdot\frac{25}{16}}=\frac{1}{4\cdot 25}=\frac{1}{100}\,.$$

Uwaga: W rzeczywistości $\sqrt[3]{2}\approx 1,25992$, skąd widać, że uzyskane w zadaniu oszacowanie jest bardzo dokładne. Oszacowanie liczby $\sqrt[3]{2}$ od dołu jest tematem zadania **245**.

238. Zastosowanie nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną pięciu liczb, z których jedna jest równa x^5, a cztery są równe 1, prowadzi do nierówności

$$\sqrt[5]{x^5}\leqslant\frac{x^5+4}{5}\,,$$

z której otrzymujemy tezę zadania.

239. Z nierówności $f(27)\leqslant f(32)=15$ oraz $f(9)\geqslant f(8)=9$ otrzymujemy $f(3)=5$, co prowadzi do liczb przedstawionych w Tabeli 1.

Kontynuujemy wypełnianie tabelki liczbami spełniającymi warunki **1**° i **2**°, aż dojdziemy do sytuacji przedstawionej w Tabeli 2.

Tabela 1

n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$
2	3	**18**	13	**34**	
3	5	**19**		**35**	
4	6	**20**		**36**	16
5		**21**		**37**	
6	8	**22**		**38**	
7		**23**		**39**	
8	9	**24**	14	**40**	
9	10	**25**		**41**	
10		**26**		**42**	
11		**27**	15	**43**	
12	11	**28**		**44**	
13		**29**		**45**	
14		**30**		**46**	
15		**31**		**47**	
16	12	**32**	15	**48**	17
17		**33**		**49**	

Tabela 2

n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$
2	3	**18**	13	**34**	16
3	5	**19**	13	**35**	16
4	6	**20**	13	**36**	16
5	7	**21**	14	**37**	16
6	8	**22**	14	**38**	16
7	9	**23**	14	**39**	16
8	9	**24**	14	**40**	16
9	10	**25**	14	**41**	
10	10	**26**	14	**42**	17
11	11	**27**	15	**43**	17
12	11	**28**	15	**44**	17
13	11	**29**	15	**45**	17
14	12	**30**	15	**46**	17
15	12	**31**	15	**47**	17
16	12	**32**	15	**48**	17
17	13	**33**	16	**49**	18

Pozostaje uzupełnić $f(41)=16$ zgodnie z warunkiem **3**°.