Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 27 (27/2015)

Piątek, 2 października 2015 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **247**, **248** i **249** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

247. Zapisz liczbę 121 używając trzykrotnie cyfry 9.

248. Zapisz liczbę 486 używając trzykrotnie cyfry 9.

249. Zapisz liczbę 480 używając trzykrotnie cyfry 9.

Facebookowy konkurs Trapezu – Zadanie Tygodnia

250. Oto alternatywna historia eliminacji do przyszłorocznych Mistrzostw Europy w Piłce Nożnej **Euro 2016**. Obowiązują w niej te same zasady i ten sam harmonogram rozgrywek, co w naszej rzeczywistości, tylko wyniki meczów są inne.

Zgodnie z planem udało się rozegrać wszystkie mecze oprócz jednego meczu grupy D. Mecz Gibraltar – Szkocja z przyczyn technicznych został przełożony na dzień nieco późniejszy od planowanego zakończenia fazy grupowej eliminacji, a mianowicie na 15 października 2015 r.

We wcześniej rozegranych meczach grupy D padły następujące wyniki:

• Gibraltar dwukrotnie zremisował 0:0 z Gruzją, raz wygrał z Irlandią 1:0, a pozostałe 6 meczów przegrał 0:8.

• Gruzja wygrała dwukrotnie ze Szkocją 2:0, natomiast 6 meczów z Irlandią, Polską i Niemcami przegrała 0:1.

• Irlandia przegrała 6 meczów ze Szkocją, Polską i Niemcami 0:1.

• Szkocja raz wygrała z Niemcami 1:0, a raz przegrała 0:1.

• Szkocja raz zremisowała z Polską 0:0, a raz przegrała 0:1.

• Polska raz wygrała z Niemcami 1:0, a raz przegrała 0:1.

Przed ostatnim meczem tabela grupy D wyglądała więc następująco:

Miejsce	Drużyna	Mecze	Punkty	Bramki
1.	**Polska**	**10**	**25**	**22:1**
2.	Niemcy	10	**24**	22:2
3.	Szkocja	9	**13**	11:6
4.	Irlandia	10	**9**	10:7
5.	Gruzja	10	**8**	4:6
6.	Gibraltar	9	**5**	1:48

W pozostałych grupach eliminacyjnych rozgrywki były mniej emocjonujące: okazało się, że każda drużyna wygrała wszystkie mecze z zespołami, które w końcowej tabeli znalazły się niżej od niej.

Jaki wynik padł w ostatnim meczu **Gibraltar – Szkocja**, jeżeli wiadomo, że:

1° Szkocji udało się uzyskać w tym meczu wynik, który dał jej awans do Euro 2016 bez konieczności gry w barażach.

2° Liczba bramek, jakie strzelono w tym meczu, była (przy spełnieniu warunku **1**°) możliwie najmniejsza.

Nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną

251. Udowodnij, że $1800! < 10^{5201}$.

252. Wykaż, że dla dowolnych liczb wymiernych dodatnich x, y zachodzi nierówność

$$4x^2y^2 < x^4 + 4y^4 .$$

253. Wyznacz najmniejszą taką liczbę rzeczywistą dodatnią C, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich x, y, z zachodzi nierówność

$$\frac{xy^2z^3}{x^3+2y^6+3z^9} \leqslant C .$$

Rozwiązania zadań 240–246

240. $71 = \dfrac{\left(\left(\sqrt{9}\right)!\right)!}{9} - 9$

241. $75 = 9\cdot 9 - \left(\sqrt{9}\right)!$

242. $84 = 9\cdot 9 + \sqrt{9} = \dfrac{9!}{\left(\left(\sqrt{9}\right)!\right)!\cdot\left(\sqrt{9}\right)!}$

243. $1008 = \dfrac{9!+9!}{\left(\left(\sqrt{9}\right)!\right)!}$

244. Z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną otrzymujemy

$$1999! = \left(\sqrt[1999]{1999!}\right)^{1999} < \left(\frac{1+2+3+\ldots+1999}{1999}\right)^{1999} = 1000^{1999} = 10^{3\cdot 1999} = 10^{5997} < 10^{6000} .$$

245. Udowodnimy, że $\sqrt[3]{2} - 1,25 > 0,0098$.

Stosując wzór na różnicę sześcianów i wykorzystując nierówność $5/4 < \sqrt[3]{2}$ otrzymujemy

$$\sqrt[3]{2} - \frac{5}{4} = \frac{2-\frac{125}{64}}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}\cdot\frac{5}{4}+\frac{25}{16}} > \frac{\frac{3}{64}}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}} = \frac{\frac{3}{64}}{3\cdot\sqrt[3]{4}} = \frac{1}{64\cdot\sqrt[3]{4}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^{20}}} .$$

Rozwiązanie będzie zakończone, jeśli udowodnimy, że $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2^{20}}} > \dfrac{98}{10000}$, co jest równoważne kolejnym nierównościom:

$$10000^3 > 98^3\cdot 2^{20} , \qquad 2^{12}\cdot 5^{12} > 2^3\cdot 7^6\cdot 2^{20} , \qquad 5^{12} > 2^{11}\cdot 7^6 . \tag{1}$$

W celu dowodu nierówności (1) rozważmy 11 liczb, z których sześć jest równych $250-5=245$, a pięć jest równych $250+6=256$. Na mocy nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną tych liczb otrzymujemy kolejno:

$$\sqrt[11]{245^6\cdot 256^5} < \frac{6\cdot(250-5)+5\cdot(250+6)}{11} , \qquad \sqrt[11]{245^6\cdot 256^5} < 250 ,$$

$$245^6\cdot 256^5 < 250^{11} , \qquad 5^6\cdot 7^{12}\cdot 2^{40} < 2^{11}\cdot 5^{33} , \qquad 2^{29}\cdot 7^{12} < 5^{27} . \tag{2}$$

Mnożąc stronami nierówność (2) przez

$$125 = \qquad 5^3 < 2^7 \qquad = 128$$

otrzymujemy po uproszczeniu nierówność (1).

246. Z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną liczb x^2 i $2y^2$ otrzymujemy

$$\sqrt{x^2\cdot 2y^2} \leqslant \frac{x^2+2y^2}{2} ,$$

skąd wynika nierówność podana w treści zadania.

Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x^2 = 2y^2$, czyli $x/y = \sqrt{2}$.