Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 28 (28/2015)

Piątek, 9 października 2015 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **254**, **255**, **256** i **257** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

254. Zapisz liczbę 495 używając trzykrotnie cyfry 9.

255. Zapisz liczbę 600 używając trzykrotnie cyfry 9.

256. Zapisz liczbę 648 używając trzykrotnie cyfry 9.

Facebookowy konkurs Trapezu – Zadanie Tygodnia

257. Zapisz jak najmniejszą liczbę całkowitą większą od 600 używając trzykrotnie cyfry 9. Przez *jak najmniejszą* rozumiemy *najmniejszą spośród liczb zapisanych przez uczestników konkursu.* Tym razem osoby biorące udział w konkursie mogą odpowiadać wielokrotnie.

Nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną

258. Udowodnij, że $\sqrt[10]{10}<1,259$.

259. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c, d zachodzi nierówność

$$abc+bcd+cda+dab\leqslant a^3+b^3+c^3+d^3\,.$$

260. Udowodnij, że $\sqrt[6]{3}>1,2$.

Rozwiązania zadań 247–253

247. $121=\dfrac{\left(\left(\sqrt{9}\right)!\right)!+\left(\sqrt{9}\right)!}{\left(\sqrt{9}\right)!}$

248. $486=\left(\sqrt{9}\right)!\cdot 9\cdot 9$

249. $480=\dfrac{\left(\left(\sqrt{9}\right)!\right)!+\left(\left(\sqrt{9}\right)!\right)!}{\sqrt{9}}=\left(\left(\sqrt{9}\right)!\right)!-\dfrac{\left(\left(\sqrt{9}\right)!\right)!}{\sqrt{9}}$

250. W każdej z pozostałych grup trzecia drużyna przegrała po dwa mecze z drużynami pierwszą i drugą oraz wygrała po dwa mecze z drużynami czwartą i piątą. Uzyskała więc w meczach z tymi drużynami **12 punktów** i właśnie tyle punktów ma w tabeli *trzecich drużyn.* Ta tabela wyłania zespół, który awansuje do Euro 2016 bez konieczności gry w barażach. Przypomnijmy, że tabela ta nie uwzględnia meczów z szóstym zespołem grupy.

Szkocja bez względu na wynik meczu z Gibraltarem zajmie trzecie miejsce w grupie D. Szkoci zdobyli wprawdzie 13 punktów, ale tylko 10 z pierwszymi pięcioma drużynami. Nawet po wygranej z Gibraltarem liczba punktów uzyskanych w meczach z pierwszą piątką drużyn grupy D się nie zwiększy i Szkoci z 10 punktami znajdą się na ostatnim miejscu w tabeli *trzecich drużyn.* A wtedy czekają ich baraże.

Jednak Szkoci zdobyli już 13 punktów, w tym ani jednego z Gruzją. Gdyby więc udało im się zepchnąć Gruzję na szóste miejsce w grupie D, to Szkocja z **13 punktami** wygrałaby ranking *trzecich drużyn* i zdobyła bezpośredni awans do Euro 2016. Aby awansować, Szkoci muszą za wszelką cenę wepchnąć Gibraltar na miejsce piąte, przed Gruzję. Przede wszystkim Szkocja musi przegrać mecz z Gibraltarem, aby dać mu 3 punkty. Wtedy mając 8 punktów Gibraltar zrówna się z Gruzją.

Zgodnie z regulaminem fazy grupowej eliminacji do Euro 2016, w razie równej liczby punktów o wyższym miejscu w grupie decydują kolejno:

1. Większa liczba punktów w meczach bezpośrednich między zainteresowanymi drużynami. Przy dwóch bezbramkowych remisach Gibraltaru z Gruzją to niczego nie rozstrzyga.

2. Większa różnica bramek w meczach bezpośrednich obu drużyn. Nie rozstrzyga.

3. Większa liczba bramek strzelonych w meczach bezpośrednich zainteresowanych drużyn. Nigdy nie rozstrzyga w przypadku, gdy mamy do czynienia tylko z dwoma drużynami z tą samą liczbą punktów.

4. Większa liczba bramek strzelonych na wyjeździe w meczach bezpośrednich obu drużyn. Nie rozstrzyga.

5. Większa różnica bramek we wszystkich meczach grupowych, a następnie większa liczba bramek strzelonych we wszystkich meczach grupowych. Gruzja ma różnicę bramek $-\mathbf{2}$, a Gibraltar przed meczem ze Szkocją ma różnicę bramek $-\mathbf{47}$. Aby wyprzedzić w tabeli Gruzję, Gibraltar powinien wygrać ze Szkocją różnicą co najmniej 45 bramek (i tak będzie miał więcej bramek strzelonych, więc wystarczy, aby osiągnął tę samą różnicę bramek, co Gruzja). Lub inaczej: **Szkocja aby awansować, musi ostatni mecz przegrać różnicą co najmniej 45 bramek!**

Tak więc wynik meczu **Gibraltar – Szkocja**, który przy minimalnej liczbie strzelonych przez obie drużyny bramek daje Szkotom awans do Euro 2016, to **45:0** dla Gibraltaru. Wynik jak najbardziej realny, jeśli zważyć, że celem obu drużyn jest strzelanie do tej samej bramki.

No cóż, takie są reguły eliminacji, że czasami dla wywalczenia awansu trzeba ostatni mecz przegrać i to ogromną różnicą bramek.

251. Z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną otrzymujemy

$$\mathbf{199!} = \left(\sqrt[199]{199!}\right)^{199} < \left(\frac{1+2+3+\ldots+199}{199}\right)^{199} = 100^{199} = \mathbf{10^{398}}$$

oraz

$$\mathbf{200\cdot 201\cdot 202\cdot\ldots\cdot 1800} = \left(\sqrt[1601]{200\cdot 201\cdot 202\cdot\ldots\cdot 1800}\right)^{1601} <$$

$$< \left(\frac{200+201+202+\ldots+1800}{1601}\right)^{1601} = 1000^{1601} = \mathbf{10^{4803}}\,,$$

co po przemnożeniu stronami daje nierówność z treści zadania.

252. Z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną zastosowaną do liczb x^4 i $4y^4$ otrzymujemy $\sqrt{x^4\cdot 4y^4} \leqslant \dfrac{x^4+4y^4}{2}$, skąd wynika słaba wersja nierówności danej w treści zadania. Równość może zachodzić tylko wtedy, gdy $x^4 = 4y^4$, czyli $x/y = \sqrt{2}$, co jednak nie jest możliwe w przypadku wymiernych liczb x i y. Zatem udowodniliśmy nierówność ostrą, jak w treści zadania.

253. Z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną zastosowaną do liczb x^3, $2y^6$ i $3z^9$ otrzymujemy

$$\sqrt[3]{x^3\cdot 2y^6\cdot 3z^9} \leqslant \frac{x^3+2y^6+3z^9}{3}\,, \qquad \text{skąd} \qquad \frac{xy^2z^3}{x^3+2y^6+3z^9} \leqslant \frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{6}}\,, \tag{1}$$

przy czym w przypadku $x^3 = 2y^6 = 3z^9$ zachodzi równość. Zatem najmniejszą liczbą C spełniającą warunki zadania jest liczba występująca po prawej stronie nierówności (1).