Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 29 (29/2015)
Piątek, 16 października 2015 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **261**, **262**, **263** i **264** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

261. Zapisz liczbę 128 używając trzykrotnie cyfry 8.

262. Zapisz liczbę 192 używając trzykrotnie cyfry 8.

263. Zapisz liczbę 256 używając trzykrotnie cyfry 8.

264. Zapisz liczbę 512 używając trzykrotnie cyfry 8. Podaj trzy istotnie różne rozwiązania.

Nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną

265. Podaj przykład trzech liczb całkowitych dodatnich, których średnia arytmetyczna i średnia geometryczna różnią się o 1.

266. Wyznacz największą taką liczbę rzeczywistą dodatnią D, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$D\cdot(ab+bc)\leqslant a^2+b^2+c^2\,.$$

267. Udowodnij, że $\sqrt[8]{6}>1,25$.

Uzupełnianka pseudologarytmiczna III

268. Uzupełnij tabelkę wartości funkcji f takimi liczbami naturalnymi, aby spełnione były następujące warunki:
1° W zakresie tabelki f jest niemalejąca, czyli $f(n)\leqslant f(n+1)$ dla $n=2$, 3, 4, ...43.
2° Dla dowolnych liczb naturalnych m, n większych od 1 o iloczynie nie większym od 44 zachodzi równość $f(mn)=f(m)+f(n)$.
3° Przy zachowaniu warunków **1**° i **2**° suma liczb wpisanych w tabelkę jest możliwie najmniejsza.

n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$
2	4	**10**		**18**		**26**		**34**		**42**	
3		**11**		**19**		**27**		**35**		**43**	
4	8	**12**		**20**		**28**		**36**		**44**	
5		**13**		**21**		**29**		**37**			
6		**14**		**22**		**30**		**38**			
7		**15**		**23**		**31**		**39**			
8	12	**16**	16	**24**		**32**	20	**40**			
9		**17**		**25**		**33**		**41**			

Facebookowy konkurs Trapezu – Zadanie Tygodnia

Rozwiąż zadanie **268** i podaj w odpowiedzi liczby $f(28)$, $f(39)$ i $f(44)$.

Rozwiązania zadań 254–260

254. $495=\dfrac{9!}{\left(\left(\sqrt{9}\right)!\right)!}-9$

255. $600=\left(\left(\sqrt{9}\right)!\right)!-\dfrac{\left(\left(\sqrt{9}\right)!\right)!}{\left(\sqrt{9}\right)!}$

256. $648=\left(\left(\sqrt{9}\right)!\right)^{\sqrt{9}}\cdot\sqrt{9}$

257. $603=\sqrt{9!+9^{\sqrt{9}}}$

258. Na mocy nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną dziesięciu liczb, z których siedem jest równych 1,25, a trzy są równe 1,28, otrzymujemy

$$\sqrt[10]{1,25^7\cdot 1,28^3}<\frac{7\cdot 1,25+3\cdot 1,28}{10}\,.$$

Upraszaczając występujące wyżej wyrażenia dostajemy

$$1,25^7\cdot 1,28^3=\left(\frac{5}{2^2}\right)^7\cdot\left(\frac{2^5}{5^2}\right)^3=\frac{5^7\cdot 2^{15}}{2^{14}\cdot 5^6}=10$$

oraz

$$\frac{7\cdot 1,25+3\cdot 1,28}{10}=\frac{7\cdot 1,25+3\cdot(1,25+0,03)}{10}=$$

$$=\frac{7\cdot 1,25+3\cdot 1,25}{10}+\frac{3\cdot 0,03}{10}=1,25+0,009=1,259\,,$$

skąd

$$\sqrt[10]{10}<1,259\,.$$

259. Z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną zastosowaną do liczb a^3, b^3 i c^3 otrzymujemy

$$abc\leqslant\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\,.$$

Analogicznie dostajemy nierówności

$$bcd\leqslant\frac{b^3+c^3+d^3}{3},\qquad cda\leqslant\frac{c^3+d^3+a^3}{3}\qquad\text{oraz}\qquad dab\leqslant\frac{d^3+a^3+b^3}{3}\,.$$

Dodając stronami powyższe cztery nierówności otrzymujemy tezę zadania.

260. Przekształcamy daną w zadaniu nierówność:

$$\left(\frac{6}{5}\right)^6<3,\qquad \frac{2^6\cdot 3^6}{5^6}<3,\qquad 2^6\cdot 3^5<5^6\,.$$

W celu dowodu ostatniej nierówności rozważmy liczby 24, 24 i 27. Ich średnia arytmetyczna jest równa 25, a średnia geometryczna $\sqrt[3]{24^2\cdot 27}$. Z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną otrzymujemy więc kolejno:

$$\sqrt[3]{24^2\cdot 27}<25,\qquad 24^2\cdot 27<25^3,\qquad 2^6\cdot 3^5<5^6\,.$$

Uwaga: Liczby $2^6\cdot 3^5=15552$ oraz $5^6=15625$ niewiele się różnią, a mimo to udało nam się udowodnić nierówność między nimi bez wykonywania bezpośrednich obliczeń na liczbach większych od 27. To pokazuje siłę metody dowodzenia nierówności w oparciu o nierówność między średnimi.