Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

# TRAPEZ

**Nr 30 (30/2015)**

**Piątek, 23 października 2015 r.**

### Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **269**, **270**, **271** i **272** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

**269.** Zapisz liczbę 250 używając cyfr 4, 4 i 5.

**270.** Zapisz liczbę 17 używając cyfr 1, 3 i 5 (każdej tylko raz).

**271.** Zapisz liczbę 145 używając cyfr 1, 3 i 5 (każdej tylko raz).

### Facebookowy konkurs Trapezu – Zadanie Tygodnia

**272.** Zapisz jak najmniejszą liczbę całkowitą większą od 2100 używając cyfr 4, 5 i 7 (każdej tylko raz). Przez *jak najmniejszą* rozumiemy *najmniejszą spośród liczb zapisanych przez uczestników konkursu.* Tym razem osoby biorące udział w konkursie mogą odpowiadać wielokrotnie.

### Nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną

**273.** Wyznacz największą taką liczbę rzeczywistą dodatnią $D$, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich $a$, $b$, $c$, $d$ zachodzi nierówność

$$D\cdot(abc+bcd)\leqslant a^3+b^3+c^3+d^3\,.$$

**274.** Podaj takie liczby całkowite dodatnie $x$, $y$ nie większe od 100, że liczba $\dfrac{xy}{x^2+2y^2}$ jest możliwie największa.

**275.** Udowodnij, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej $n$ zachodzi nierówność

$$n^n\cdot(2n+1)<(n+1)^{n+1}\,.$$

**276.** Udowodnij, że $\sqrt[13]{18}<1,25$.

### Rozwiązania zadań 261–268

**261.** $128=(8+8)\cdot 8$ **262.** $192=\left(\sqrt{8+8}\right)!\cdot 8$ **263.** $256=\sqrt{\sqrt{(8+8)^8}}$

**264.** $512=8\cdot 8\cdot 8=\dfrac{\sqrt{8^8}}{8}=\sqrt{\sqrt{8^8}}\cdot 8$

**265.** Przykładem trójki liczb spełniającej warunki zadania są liczby 3, 6 i 12. Ich średnia geometryczna jest równa 6, a średnia arytmetyczna 7. Ogólniej, dla dowolnej liczby naturalnej $n$ liczby $3n^2$, $3n(n+1)$ i $3(n+1)^2$ mają średnią geometryczną równą $3n(n+1)=3n^2+3n$ i średnią arytmetyczną $3n^2+3n+1$. Podany na początku rozwiązania przykład liczbowy otrzymujemy dla $n=1$.

Powyższa nieskończona rodzina trójek liczb nie wyczerpuje jednak wszystkich możliwych przykładów. Innymi trójkami liczb spełniającymi warunki zadania są na przykład: (16, 27, 32), (100, 128, 135), (242, 256, 297), (324, 375, 384) i (784, 864, 875).

**266.** Z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną zastosowaną do liczb $a^2$ i $\frac{b^2}{2}$ otrzymujemy

$$\frac{ab}{\sqrt{2}}\leqslant\frac{a^2+\frac{b^2}{2}}{2}\,,\qquad\text{czyli}\qquad\sqrt{2}\cdot ab\leqslant a^2+\frac{b^2}{2}\,.\tag{1}$$

Analogicznie uzyskujemy nierówność

$$\sqrt{2}\cdot bc \leqslant \frac{b^2}{2}+c^2\,. \tag{2}$$

Dodając stronami nierówności (1) i (2) otrzymujemy podaną w treści zadania nierówność ze stałą $D=\sqrt{2}$.

Ponieważ w obu nierównościach (1) i (2) zachodzi równość przy $a^2=\frac{b^2}{2}=c^2$, stałej $D$ nie można zwiększyć. Istotnie, dla $a=c=1$ oraz $b=\sqrt{2}$ nierówność dana w treści zadania przyjmuje postać

$$D\cdot 2\sqrt{2}\leqslant 4\,, \qquad \text{czyli} \qquad D\leqslant\sqrt{2}\,.$$

**267.** Przekształcamy daną w zadaniu nierówność:

$$\sqrt[8]{6}>\frac{5}{4}, \qquad 6>\left(\frac{5}{4}\right)^8, \qquad 6>\frac{5^8}{4^8}, \qquad 2\cdot3\cdot2^{16}>5^8, \qquad 2^{17}\cdot3>5^8\,.$$

Dla dowodu ostatniej nierówności rozważmy 5 liczb, z których 2 są równe 45, a 3 są równe 50. Na mocy nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną tych liczb otrzymujemy kolejno:

$$\sqrt[5]{45^2\cdot50^3}<48, \qquad 45^2\cdot50^3<48^5, \qquad 3^4\cdot5^2\cdot2^3\cdot5^6<2^{20}\cdot3^5, \qquad 5^8<2^{17}\cdot3\,.$$

*Uwaga:* Bezpośrednie obliczenia pokazują, że $5^8=390\,625$ oraz $2^{17}\cdot3=393\,216$. Dzięki odpowiedniemu wykorzystaniu nierówności między średnimi, udało nam się porównać te liczby bez wykonywania bezpośrednich obliczeń na liczbach większych od 50.

**268.** Z nierówności $16=f(16)\leqslant f(27)\leqslant f(32)=20$ otrzymujemy $f(3)=6$. To prowadzi do wartości przedstawionych w Tabeli 1.

Kontynuujemy wypełnianie tabelki liczbami spełniającymi warunki **1**° i **2**°, aż dojdziemy do stanu przedstawionego w Tabeli 2.

**Tabela 1**

| $n$ | $f(n)$ | $n$ | $f(n)$ | $n$ | $f(n)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **2** | 4 | **17** | | **32** | 20 |
| **3** | 6 | **18** | 16 | **33** | |
| **4** | 8 | **19** | | **34** | |
| **5** | | **20** | | **35** | |
| **6** | 10 | **21** | | **36** | 20 |
| **7** | | **22** | | **37** | |
| **8** | 12 | **23** | | **38** | |
| **9** | 12 | **24** | 18 | **39** | |
| **10** | | **25** | | **40** | |
| **11** | | **26** | | **41** | |
| **12** | 14 | **27** | 18 | **42** | |
| **13** | | **28** | | **43** | |
| **14** | | **29** | | **44** | |
| **15** | | **30** | | | |
| **16** | 16 | **31** | | | |

**Tabela 2**

| $n$ | $f(n)$ | $n$ | $f(n)$ | $n$ | $f(n)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **2** | 4 | **17** | 16 | **32** | 20 |
| **3** | 6 | **18** | 16 | **33** | 20 |
| **4** | 8 | **19** | 16 | **34** | 20 |
| **5** | 9 | **20** | 17 | **35** | 20 |
| **6** | 10 | **21** | 17 | **36** | 20 |
| **7** | 11 | **22** | 18 | **37** | 20 |
| **8** | 12 | **23** | 18 | **38** | 20 |
| **9** | 12 | **24** | 18 | **39** | 20 |
| **10** | 13 | **25** | 18 | **40** | 21 |
| **11** | 14 | **26** | 18 | **41** | 21 |
| **12** | 14 | **27** | 18 | **42** | 21 |
| **13** | 14 | **28** | 19 | **43** | |
| **14** | 15 | **29** | 19 | **44** | 22 |
| **15** | 15 | **30** | 19 | | |
| **16** | 16 | **31** | | | |

Pozostaje uzupełnić $f(31)=19$ oraz $f(43)=21$ zgodnie z warunkiem **3**°.