Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 31 (31/2015)

Piątek, 30 października 2015 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **277**, **278**, **279**, **280** i **281** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

277. Zapisz liczbę 175 używając cyfr 4, 5 i 7 (każdej tylko raz).

278. Zapisz liczbę 245 używając cyfr 3, 5 i 5.

279. Zapisz liczbę 336 używając cyfr 3, 5 i 5.

280. Zapisz liczbę 82 używając cyfr 3, 3, 5 i 7.

Facebookowy konkurs Trapezu – Zadanie Tygodnia

281. Zapisz liczbę 175 używając cyfr 1, 4, 6 i 8 (każdej tylko raz).

Nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną

282. Wyznacz największą taką liczbę rzeczywistą dodatnią D, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b zachodzi nierówność

$$D\cdot a^2b\leqslant a^3+b^3\,.$$

283. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej $n>1$ zachodzi nierówność

$$n^n>(n+1)^{n-1}\,.$$

284. Udowodnij, że $\sqrt[21]{108}<1,25$.

Rozwiązania zadań 269–276

269. $250=\sqrt{\sqrt{\sqrt{5^{4!}}}}\cdot\sqrt{4}$ **270.** $17=\sqrt{5!+1}+3!$ **271.** $145=\dfrac{(3!)!}{5}+1$

272. $2160=7!-4!\cdot 5!$

273. Z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną zastosowaną do liczb a^3, $\frac{b^3}{2}$ i $\frac{c^3}{2}$ otrzymujemy

$$\frac{abc}{\sqrt[3]{4}}\leqslant\frac{a^3+\frac{b^3}{2}+\frac{c^3}{2}}{3}\,,\qquad\text{czyli}\qquad\frac{3}{\sqrt[3]{4}}\cdot abc\leqslant a^3+\frac{b^3}{2}+\frac{c^3}{2}\,.\tag{1}$$

Analogicznie uzyskujemy nierówność

$$\frac{3}{\sqrt[3]{4}}\cdot bcd\leqslant\frac{b^3}{2}+\frac{c^3}{2}+d^3\,.\tag{2}$$

Dodając stronami nierówności (1) i (2) otrzymujemy podaną w treści zadania nierówność ze stałą $D=3/\sqrt[3]{4}$.

Ponieważ w obu nierównościach (1) i (2) zachodzi równość przy $a^3=\frac{b^3}{2}=\frac{c^3}{2}=d^3$, stałej D nie można zwiększyć.

274. Przyjmijmy na chwilę, że liczby x, y mogą przyjmować dowolne wartości rzeczywiste dodatnie. Nierówność między średnią geometryczną i arytmetyczną liczb x^2 i $2y^2$ ma postać $\sqrt{x^2\cdot 2y^2}\leqslant\dfrac{x^2+2y^2}{2}$, co po prostych przekształceniach prowadzi do nierówności

$$\frac{xy}{x^2+2y^2}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{4}\,.\tag{3}$$

Przy tym równość zachodzi w przypadku, gdy $x/y=\sqrt{2}$, czyli w tym właśnie przypadku interesujące nas wyrażenie $W(x,y)=\frac{xy}{x^2+2y^2}$ osiąga wartość najwieksza.

Jeśli teraz, tak jak jest to określone w warunkach zadania, ograniczymy się do rozważania liczb całkowitych dodatnich x, y nie większych od 100, wydaje się intuicyjnie uzasadnione oczekiwać, że wyrażenie $W(x,y)$ osiąga największe wartości wtedy, gdy iloraz x/y jest możliwie dobrym przybliżeniem liczby $\sqrt{2}$, czyli gdy liczby x^2 i $2y^2$ możliwie mało się różnią.

Świetnym kandydatem na parę liczb (x, y) maksymalizującą interesujące nas wyrażenie $W(x,y)$ jest więc para liczb $x=99$, $y=70$, gdzie nie dość, że $x^2=9801$ i $2y^2=9800$ różnią się tylko o 1, to na dodatek x ma niemalże największą dopuszczalną warunkami zadania wartość. Można sprawdzić, że dostajemy tu całkiem niezłe przybliżenie liczby $\sqrt{2}$ liczbą wymierną o dwucyfrowym liczniku i mianowniku, mamy bowiem $99/70\approx\mathbf{1,41428}571$ oraz $\sqrt{2}\approx\mathbf{1,41421}356$. Oczekujemy więc, że największa wartość danego w zadaniu wyrażenia to $W(99,70)=\frac{99\cdot 70}{99^2+2\cdot 70^2}=\frac{6930}{19601}$.

Jednak podane wyżej rozumowanie nie jest w pełni precyzyjne i można mieć obawy, czy aby czegoś nie przeoczyliśmy lub może intuicja nam coś źle podpowiedziała. Może jednak istnieją liczby całkowite dodatnie x, y nie większe od 100, dla których zachodzi nierówność $W(x,y)>W(99,70)$?

Przypuśćmy, że takie liczby istnieją. Wówczas liczba $W(x,y)=\frac{xy}{x^2+2y^2}$ jest liczbą o mianowniku nie większym od 30000. Ponieważ różnica dwóch różnych liczb wymiernych jest nie mniejsza niż odwrotność iloczynu ich mianowników, otrzymujemy nierówność $W(x,y)-W(99,70)\geqslant 1/(19601\cdot 30000)$. Z drugiej zaś strony wobec nierówności (3) dostajemy

$$W(x,y)-W(99,70)\leqslant\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{6930}{19601}, \qquad \text{skąd} \qquad \frac{1}{19601\cdot 30000}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{6930}{19601}. \tag{4}$$

Szacowanie prawej strony nierówności (4) prowadzi do

$$\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{6930}{19601}=\frac{\frac{1}{8}-\frac{6930^2}{19601^2}}{\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{6930}{19601}}=\frac{19601^2-8\cdot 6930^2}{19601\cdot\left(2\cdot 19601\cdot\sqrt{2}+8\cdot 6930\right)}<\frac{19601^2-8\cdot 6930^2}{19601\cdot(2\cdot 19601+8\cdot 6930)}<$$

$$<\frac{19601^2-8\cdot 6930^2}{19601\cdot 30000}=\frac{(99^2+2\cdot 70^2)^2-8\cdot 99^2\cdot 70^2}{19601\cdot 30000}=\frac{(99^2-2\cdot 70^2)^2}{19601\cdot 30000}=\frac{1}{19601\cdot 30000}.$$

Zatem nierówność (4) jest fałszywa, a więc błędne było przypuszczenie o istnieniu liczb całkowitych dodatnich x, y nie większych od 100, dla których $W(x,y)>W(99,70)$.

275. Teza zadania wynika z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną zastosowaną do $n+1$ liczb, z których n jest równych n, a jedna jest równa $2n+1$.

Mamy bowiem

$$\sqrt[n+1]{n^n\cdot(2n+1)}<\frac{n\cdot n+(2n+1)}{n+1}=\frac{n^2+2n+1}{n+1}=n+1,$$

co po podniesieniu pierwszego i ostatniego wyrażenia do potęgi $n+1$ prowadzi do nierówności podanej w treści zadania.

276. Przekształcamy daną w zadaniu nierówność:

$$\sqrt[13]{18}<\frac{5}{4}, \qquad 18<\left(\frac{5}{4}\right)^{13}, \qquad 18<\frac{5^{13}}{4^{13}}, \qquad 2\cdot 3^2\cdot 2^{26}<5^{13}, \qquad 2^{27}\cdot 3^2<5^{13}.$$

W celu dowodu ostatniej nierówności rozważmy 8 liczb, z których 5 jest równych 72, a 3 są równe 80. Na mocy nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną tych liczb otrzymujemy kolejno:

$$\sqrt[8]{72^5\cdot 80^3}<75, \qquad 72^5\cdot 80^3<75^8, \qquad 2^{15}\cdot 3^{10}\cdot 2^{12}\cdot 5^3<3^8\cdot 5^{16}, \qquad 2^{27}\cdot 3^2<5^{13}.$$