

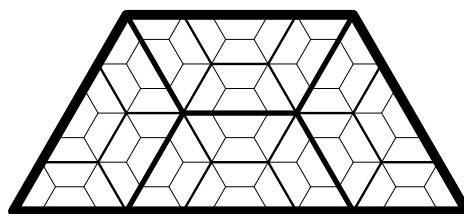
## Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **285**, **286** i **287** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

**285.** Zapisz liczbę 96 używając cyfr 3, 5 i 6.

**286.** Zapisz liczbę 100 używając cyfr 3, 5 i 6.

**287.** Zapisz liczbę 504 używając cyfr 3, 6 i 6. Podaj dwa istotnie różne rozwiązania.



Autorski Tygodnik Matematyczny  
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

# TRAPEZ

Nr **32** (32/2015)

Piątek, 6 listopada 2015 r.

## Uzupełnianka pseudologarytmiczna IV

**288.** Uzupełnij tabelkę wartości funkcji  $f$  takimi liczbami naturalnymi, aby spełnione były następujące warunki:

1° W zakresie tabelki  $f$  jest niemalejąca, czyli  $f(n) \leq f(n+1)$  dla  $n = 2, 3, 4, \dots, 64$ .

2° Dla dowolnych liczb naturalnych  $m, n$  większych od 1 o iloczynie nie większym od 65 zachodzi równość  $f(mn) = f(m) + f(n)$ .

3° Przy zachowaniu warunków 1° i 2° suma liczb wpisanych w tabelkę jest możliwie najmniejsza.

$n$	$f(n)$	$n$	$f(n)$	$n$	$f(n)$	$n$	$f(n)$	$n$	$f(n)$	$n$	$f(n)$
2	5	13		24		35		46		57	
3		14		25		36		47		58	
4	10	15		26		37		48		59	
5		16	20	27		38		49		60	
6		17		28		39		50		61	
7		18		29		40		51		62	
8	15	19		30		41		52		63	
9		20		31		42		53		64	30
10		21		32	25	43		54		65	
11		22		33		44		55			
12		23		34		45		56			

## Facebookowy konkurs Trapezu – Zadanie Tygodnia

Rozwiąż zadanie **288** i podaj w odpowiedzi liczby  $f(50)$ ,  $f(59)$  i  $f(65)$ .



### Nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną

289. Wyznacz największą taką liczbę rzeczywistą dodatnią  $D$ , że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich  $a, b, c, d, e$  zachodzi nierówność

$$D \cdot abcde^4 \leq a^8 + b^8 + c^8 + d^8 + e^8.$$

290. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej  $n > 1$  zachodzi nierówność

$$2 \cdot n^n < (n + 1)^n.$$

291. Udowodnij, że  $\sqrt[23]{1000} > 1,35$ .

### Rozwiązania zadań 277–284

277.  $175 = 7 \cdot \sqrt{5^4}$

278.  $245 = 5^3 + 5!$

279.  $336 = \frac{(5+3)!}{5!}$

280.  $82 = \frac{5!}{3} + 3! \cdot 7$

281.  $175 = \sqrt{8! - 6!} + 1 - 4!$

282. Z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną zastosowaną do liczb  $\frac{a^3}{2}$ ,  $\frac{a^3}{2}$  i  $b^3$  otrzymujemy

$$\frac{a^2b}{\sqrt[3]{4}} \leq \frac{\frac{a^3}{2} + \frac{a^3}{2} + b^3}{3},$$

czyli

$$\frac{3}{\sqrt[3]{4}} \cdot a^2b \leq a^3 + b^3, \tag{1}$$

co stanowi daną z treści zadania nierówność ze stałą  $D = 3/\sqrt[3]{4}$ .

Ponieważ w nierówności (1) zachodzi równość przy  $\frac{a^3}{2} = b^3$ , stałej  $D$  nie można zwiększyć.

283. Teza zadania wynika z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną zastosowaną do  $n$  liczb, z których  $n - 1$  jest równych  $n + 1$ , a jedna jest równa 1.

Mamy bowiem

$$\sqrt[n]{(n+1)^{n-1} \cdot 1} < \frac{(n-1) \cdot (n+1) + 1}{n} = \frac{n^2}{n} = n,$$

co po podniesieniu pierwszego i ostatniego wyrażenia do potęgi  $n$  prowadzi do nierówności podanej w treści zadania.

284. Przekształcamy daną w zadaniu nierówność:

$$\sqrt[21]{108} < \frac{5}{4}, \quad 108 < \left(\frac{5}{4}\right)^{21}, \quad 108 < \frac{5^{21}}{4^{21}}, \quad 2^2 \cdot 3^3 \cdot 2^{42} < 5^{21}, \quad 2^{44} \cdot 3^3 < 5^{21}.$$

Aby udowodnić ostatnią nierówność, rozważmy 8 liczb, z których 3 są równe 120, a 5 jest równych 128. Na mocy nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną tych liczb otrzymujemy kolejno:

$$\sqrt[8]{120^3 \cdot 128^5} < 125, \quad 120^3 \cdot 128^5 < 125^8, \quad 2^9 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 2^{35} < 5^{24}, \quad 2^{44} \cdot 3^3 < 5^{21}.$$

