Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 32 (32/2015)

Piątek, 6 listopada 2015 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **285**, **286** i **287** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

285. Zapisz liczbę 96 używając cyfr 3, 5 i 6.

286. Zapisz liczbę 100 używając cyfr 3, 5 i 6.

287. Zapisz liczbę 504 używając cyfr 3, 6 i 6. Podaj dwa istotnie różne rozwiązania.

Uzupełnianka pseudologarytmiczna IV

288. Uzupełnij tabelkę wartości funkcji f takimi liczbami naturalnymi, aby spełnione były następujące warunki:
1° W zakresie tabelki f jest niemalejąca, czyli $f(n) \leqslant f(n+1)$ dla $n=2, 3, 4, \ldots 64$.
2° Dla dowolnych liczb naturalnych m, n większych od 1 o iloczynie nie większym od 65 zachodzi równość $f(mn)=f(m)+f(n)$.
3° Przy zachowaniu warunków **1°** i **2°** suma liczb wpisanych w tabelkę jest możliwie najmniejsza.

n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$
2	5	**13**		**24**		**35**		**46**		**57**	
3		**14**		**25**		**36**		**47**		**58**	
4	10	**15**		**26**		**37**		**48**		**59**	
5		**16**	20	**27**		**38**		**49**		**60**	
6		**17**		**28**		**39**		**50**		**61**	
7		**18**		**29**		**40**		**51**		**62**	
8	15	**19**		**30**		**41**		**52**		**63**	
9		**20**		**31**		**42**		**53**		**64**	30
10		**21**		**32**	25	**43**		**54**		**65**	
11		**22**		**33**		**44**		**55**			
12		**23**		**34**		**45**		**56**			

Facebookowy konkurs Trapezu – Zadanie Tygodnia

Rozwiąż zadanie **288** i podaj w odpowiedzi liczby $f(50)$, $f(59)$ i $f(65)$.

Nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną

289. Wyznacz największą taką liczbę rzeczywistą dodatnią D, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c, d, e zachodzi nierówność

$$D\cdot abcde^4 \leqslant a^8+b^8+c^8+d^8+e^8\,.$$

290. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej $n>1$ zachodzi nierówność

$$2\cdot n^n<(n+1)^n\,.$$

291. Udowodnij, że $\sqrt[23]{1000}>1,35$.

Rozwiązania zadań 277–284

277. $175=7\cdot\sqrt{5^4}$ **278.** $245=5^3+5!$ **279.** $336=\dfrac{(5+3)!}{5!}$

280. $82=\dfrac{5!}{3}+3!\cdot 7$ **281.** $175=\sqrt{8!-6!+1}-4!$

282. Z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną zastosowaną do liczb $\frac{a^3}{2}$, $\frac{a^3}{2}$ i b^3 otrzymujemy

$$\frac{a^2b}{\sqrt[3]{4}}\leqslant\frac{\frac{a^3}{2}+\frac{a^3}{2}+b^3}{3}\,,$$

czyli

$$\frac{3}{\sqrt[3]{4}}\cdot a^2b\leqslant a^3+b^3\,, \tag{1}$$

co stanowi daną z treści zadania nierówność ze stałą $D=3/\sqrt[3]{4}$.

Ponieważ w nierówności (1) zachodzi równość przy $\frac{a^3}{2}=b^3$, stałej D nie można zwiększyć.

283. Teza zadania wynika z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną zastosowaną do n liczb, z których $n-1$ jest równych $n+1$, a jedna jest równa 1.

Mamy bowiem

$$\sqrt[n]{(n+1)^{n-1}\cdot 1}<\frac{(n-1)\cdot(n+1)+1}{n}=\frac{n^2}{n}=n\,,$$

co po podniesieniu pierwszego i ostatniego wyrażenia do potęgi n prowadzi do nierówności podanej w treści zadania.

284. Przekształcamy daną w zadaniu nierówność:

$$\sqrt[21]{108}<\frac{5}{4},\qquad 108<\left(\frac{5}{4}\right)^{21},\qquad 108<\frac{5^{21}}{4^{21}},\qquad 2^2\cdot 3^3\cdot 2^{42}<5^{21},\qquad 2^{44}\cdot 3^3<5^{21}\,.$$

Aby udowodnić ostatnią nierówność, rozważmy 8 liczb, z których 3 są równe 120, a 5 jest równych 128. Na mocy nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną tych liczb otrzymujemy kolejno:

$$\sqrt[8]{120^3\cdot 128^5}<125,\qquad 120^3\cdot 128^5<125^8,\qquad 2^9\cdot 3^3\cdot 5^3\cdot 2^{35}<5^{24},\qquad 2^{44}\cdot 3^3<5^{21}\,.$$