Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO
TRAPEZ
Nr 33 (33/2015)
Piątek, 13 listopada 2015 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **292**, **293**, **294** i **295** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

292. Zapisz liczbę 9 używając cyfr 5, 6 i 7 (każdej tylko raz).

293. Zapisz liczbę 24 używając cyfr 5, 6 i 7 (każdej tylko raz). Podaj dwa istotnie różne rozwiązania.

294. Zapisz liczbę 37 używając cyfr 5, 6 i 7 (każdej tylko raz). Podaj dwa istotnie różne rozwiązania.

Facebookowy konkurs Trapezu – Zadanie Tygodnia

295. Zapisz liczbę 14 używając cyfr 5, 6 i 7 (każdej tylko raz).

Nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną

296. Wyznacz największą taką liczbę rzeczywistą dodatnią D, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c, d, e zachodzi nierówność

$$D\cdot ab^3c^3d^8e^9 \leqslant a^{24}+b^{24}+c^{24}+d^{24}+e^{24}\,.$$

297. Wyznacz największą taką liczbę rzeczywistą dodatnią D, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c, d zachodzi nierówność

$$D\cdot(ab+bc+cd) \leqslant a^2+b^2+c^2+d^2\,.$$

298. Udowodnij, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\,.$$

299. Udowodnij, że $\sqrt[26]{2} > 1,024$.

Rozwiązania zadań 285–291

285. $96 = 6^3 - 5!$ **286.** $100 = \dfrac{6!-5!}{3!}$ **287.** $504 = \dfrac{(6+3)!}{6!} = 6! - 6^3$

288. Z warunków $f(9) \geqslant f(8) = 15$ oraz $f(27) \leqslant f(32) = 25$ wynika $f(3) = 8$. Z kolei z nierówności $23 = f(24) \leqslant f(25) \leqslant f(27) = 24$ oraz $28 = f(48) \leqslant f(49) \leqslant f(54) = 29$ otrzymujemy odpowiednio $f(5) = 12$ i $f(7) = 14$. To już pozwala dokończyć uzupełnianie łamigłówki bez większych problemów:

n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$
2	5	**12**	18	**22**	22	**32**	25	**42**	27	**52**	29	**62**	30
3	8	**13**	19	**23**	23	**33**	25	**43**	27	**53**	29	**63**	30
4	10	**14**	19	**24**	23	**34**	26	**44**	27	**54**	29	**64**	30
5	12	**15**	20	**25**	24	**35**	26	**45**	28	**55**	29	**65**	31
6	13	**16**	20	**26**	24	**36**	26	**46**	28	**56**	29		
7	14	**17**	21	**27**	24	**37**	26	**47**	28	**57**	29		
8	15	**18**	21	**28**	24	**38**	26	**48**	28	**58**	29		
9	16	**19**	21	**29**	24	**39**	27	**49**	28	**59**	29		
10	17	**20**	22	**30**	25	**40**	27	**50**	29	**60**	30		
11	17	**21**	22	**31**	25	**41**	27	**51**	29	**61**	30		

289. Z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną zastosowaną do liczb a^8, b^8, c^8, d^8, $\frac{e^8}{4}$, $\frac{e^8}{4}$, $\frac{e^8}{4}$ i $\frac{e^8}{4}$ otrzymujemy

$$\frac{abcde^4}{\sqrt[8]{4^4}} \leqslant \frac{a^8+b^8+c^8+d^8+\frac{e^8}{4}+\frac{e^8}{4}+\frac{e^8}{4}+\frac{e^8}{4}}{8},$$

czyli

$$4\cdot abcde^4 \leqslant a^8+b^8+c^8+d^8+e^8\,, \tag{1}$$

co stanowi daną w treści zadania nierówność ze stałą $D=4$.

Ponieważ w nierówności (1) zachodzi równość przy $a^8=b^8=c^8=d^8=\frac{e^8}{4}$, stałej D nie można zwiększyć. Dla ilustracji tej równości możemy rozważyć przypadek $a=b=c=d=1$, $e=\sqrt[4]{2}$, w którym obie strony nierówności (1) są równe 8.

290. Teza zadania wynika z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną zastosowaną do n liczb, z których $n-1$ jest równych n, a jedna jest równa $2n$.

Mamy bowiem

$$\sqrt[n]{n^{n-1}\cdot 2n} < \frac{(n-1)\cdot n+2n}{n} = \frac{n^2-n+2n}{n} = \frac{n^2+n}{n} = n+1\,,$$

co po podniesieniu pierwszego i ostatniego wyrażenia do potęgi n prowadzi do nierówności podanej w treści zadania.

Uwaga: Inny sposób zredagowania tego samego rozwiązania jest następujący: Dowodzona nierówność ma postać

$$(2n)\cdot n^{n-1} < (n+1)^n\,, \tag{2}$$

gdzie po każdej ze stron znajduje się iloczyn n czynników dodatnich. Ponadto suma czynników po każdej ze stron nierówności (2) jest taka sama, gdyż jest równa n^2+n.

Nierówność między średnią geometryczną i arytmetyczną może być przeformułowana następująco: Spośród iloczynów ustalonej liczby czynników dodatnich o ustalonej sumie, największą wartość ma ten iloczyn, w którym wszystkie czynniki są równe.

Nierówność (2) wynika z powyższego sformułowania oraz uwag o równej liczbie i równej sumie czynników po obu jej stronach.

291. Przekształcamy daną w zadaniu nierówność:

$$\sqrt[23]{1000} > \frac{27}{20}, \qquad 1000 > \left(\frac{27}{20}\right)^{23}, \qquad 1000 > \frac{27^{23}}{20^{23}}, \qquad 2^3\cdot 5^3\cdot 2^{46}\cdot 5^{23} > 3^{69}, \qquad 2^{49}\cdot 5^{26} > 3^{69}.$$

Aby udowodnić ostatnią nierówność, rozważmy 21 liczb, z których 5 jest równych $384=400-16$, a 16 jest równych $405=400+5$. Na mocy nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną tych liczb otrzymujemy kolejno:

$$\sqrt[21]{384^5\cdot 405^{16}} < 400, \qquad 384^5\cdot 405^{16} < 400^{21}, \qquad 2^{35}\cdot 3^5\cdot 3^{64}\cdot 5^{16} < 2^{84}\cdot 5^{42}, \qquad 3^{69} < 2^{49}\cdot 5^{26}.$$

Uwaga: Bezpośrednie obliczenia pokazują, że $3^{69}\approx 8,344\cdot 10^{32}$ oraz $2^{49}\cdot 5^{26}\approx 8,389\cdot 10^{32}$. Iloraz tych liczb jest w przybliżeniu równy $1,0054$. Udowodnienie nierówności między tak dużymi liczbami bardzo zbliżonej wielkości wydaje się na pierwszy rzut oka zadaniem niewykonalnym bez użycia komputera. Jednak zadanie to wykonaliśmy bez wykonywania bezpośrednich obliczeń na liczbach większych od 500. To pokazuje ogromną siłę nierówności między średnimi zastosowanej w odpowiedni sposób do porównywania liczb.