Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **300**, **301**, **302** i **303** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

300. Zapisz liczbę 44 używając cyfr 5, 6 i 7 (każdej tylko raz).

301. Zapisz liczbę 47 używając cyfr 5, 6 i 7 (każdej tylko raz).

302. Zapisz liczbę 48 używając cyfr 5, 6 i 7 (każdej tylko raz).

Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO
TRAPEZ
Nr 34 (34/2015)
Piątek, 20 listopada 2015 r.

Facebookowy konkurs Trapezu – Zadanie Tygodnia

303. Zapisz jak najmniejszą liczbę całkowitą większą od 4000 używając cyfr 4, 4 i 7. Przez *jak najmniejszą* rozumiemy *najmniejszą spośród liczb zapisanych przez uczestników konkursu.* Tym razem osoby biorące udział w konkursie mogą odpowiadać wielokrotnie.

Nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną

304. Wyznacz największą taką liczbę rzeczywistą dodatnią D, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c, d, e zachodzi nierówność

$$D\cdot(ab+bc+cd+de)\leqslant a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\,.$$

305. Udowodnij, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}.$$

306. Udowodnij, że $\sqrt[33]{2}<1,024$.

Rozwiązania zadań 292–299

292. $9=\sqrt{5+76}$ **293.** $24=\sqrt{576}=(5+6-7)!$ **294.** $37=7\cdot 6-5=5\cdot 6+7$
295. $14=\sqrt{5!+76}$

296. Z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną zastosowaną do 24 liczb, z których jedna jest równa a^{24}, trzy są równe $b^{24}/3$, trzy są równe $c^{24}/3$, osiem jest równych $d^{24}/8$ i dziewięć jest równych $e^{24}/9$, otrzymujemy

$$\frac{ab^3c^3d^8e^9}{\sqrt[24]{3^3\cdot 3^3\cdot 8^8\cdot 9^9}}\leqslant\frac{a^{24}+b^{24}+c^{24}+d^{24}+e^{24}}{24}\,,$$

czyli po uproszczeniu

$$4\cdot ab^3c^3d^8e^9\leqslant a^{24}+b^{24}+c^{24}+d^{24}+e^{24}\,, \tag{1}$$

co stanowi daną w treści zadania nierówność ze stałą $D=4$.

Ponieważ w nierówności (1) zachodzi równość przy $a^{24}=\frac{b^{24}}{3}=\frac{c^{24}}{3}=\frac{d^{24}}{8}=\frac{e^{24}}{9}$, stałej D nie można zwiększyć.

297. Z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną zastosowaną do liczb a^2 i $q^2\cdot b^2$, gdzie liczba rzeczywista dodatnia q zostanie dobrana później, otrzymujemy

$$q\cdot ab\leqslant\frac{a^2+q^2\cdot b^2}{2}\,,$$

czyli

$$2q\cdot ab\leqslant a^2+q^2\cdot b^2\,. \tag{2}$$

Analogicznie uzyskujemy nierówność
$$2q\cdot cd\leqslant q^2\cdot c^2+d^2\,. \tag{3}$$
Ponadto zastosowanie nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną do liczb $(1-q^2)\cdot b^2$ oraz $(1-q^2)\cdot c^2$ prowadzi do
$$2\cdot\left(1-q^2\right)\cdot bc\leqslant\left(1-q^2\right)\cdot b^2+\left(1-q^2\right)\cdot c^2\,. \tag{4}$$
Dodając stronami nierówności (2), (3) i (4) otrzymujemy
$$2q\cdot ab+2\cdot\left(1-q^2\right)\cdot bc+2q\cdot cd\leqslant a^2+b^2+c^2+d^2\,,$$
co będzie stanowić nierówność podaną w treści zadania, jeżeli $q=1-q^2$, czyli $q=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Przy tym stała D jest równa $2q=\sqrt{5}-1$.

Ponieważ w nierównościach (2), (3) i (4) zachodzi równość przy $a^2=q^2\cdot b^2=q^2\cdot c^2=d^2$, stałej D nie można zwiększyć.

298. Daną w treści zadania nierówność możemy przepisać w postaci
$$\frac{(n+1)^n}{n^n}<\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\,,$$
czyli
$$(n+1)^{2n+1}<n^n\cdot(n+2)^{n+1}\,. \tag{5}$$
Mnożąc nierówność (5) stronami przez n otrzymujemy nierówność równoważną
$$n\cdot(n+1)^{2n+1}<n^{n+1}\cdot(n+2)^{n+1}\,,$$
którą możemy zapisać jako
$$\left(n^2+n\right)\cdot\left(n^2+2n+1\right)^n<\left(n^2+2n\right)^{n+1}\,. \tag{6}$$
Ponieważ po każdej ze stron nierówności (6) występuje iloczyn $n+1$ czynników o takiej samej sumie równej n^3+3n^2+2n, większą wartość ma ten iloczyn, którego czynniki są równe.

299. Przekształcamy daną w zadaniu nierówność:
$$\sqrt[26]{2}>\frac{128}{125},\qquad 2>\left(\frac{128}{125}\right)^{26},\qquad 2>\frac{2^{182}}{5^{78}},\qquad 2\cdot 5^{78}>2^{182},\qquad 5^{78}>2^{181}\,.$$

Udowodnimy ostatnią nierówność. W tym celu rozważmy 28 liczb, z których 3 są równe $125-25=100$, a 25 jest równych $125+3=128$. Na mocy nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną tych liczb otrzymujemy kolejno:
$$\sqrt[28]{100^3\cdot 128^{25}}<\frac{3\cdot(125-25)+25\cdot(125+3)}{28},\qquad \sqrt[28]{100^3\cdot 128^{25}}<125\,,$$
$$100^3\cdot 128^{25}<125^{28},\qquad 2^6\cdot 5^6\cdot 2^{175}<5^{84},\qquad 2^{181}<5^{78}\,.$$

Uwaga: Nierówność $2^{181}<5^{78}$ jest równoważna nierówności $\log_2 5>181/78$. Ponieważ $181/78=2,32051\ldots$, otrzymujemy oszacowanie
$$\log_2 5>2,32\,.$$
W rzeczywistości $\log_2 5\approx 2.3219$.