Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 35 (35/2015)

Piątek, 27 listopada 2015 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **307**, **308**, **309** i **310** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

307. Zapisz liczbę 49 używając cyfr 5, 6 i 7 (każdej tylko raz).

308. Zapisz liczbę 77 używając cyfr 5, 6 i 7 (każdej tylko raz).

309. Zapisz liczbę 17 używając cyfr 2, 2, 2 i 4. Podaj dwa istotnie różne rozwiązania.

Facebookowy konkurs Trapezu – Zadanie Tygodnia

310. Zapisz jak najmniejszą liczbę całkowitą większą od 10^6 używając cyfr 4, 4 i 7. Przez *jak najmniejszą* rozumiemy *najmniejszą spośród liczb zapisanych przez uczestników konkursu.* Tym razem osoby biorące udział w konkursie mogą odpowiadać wielokrotnie.

Nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną

311. Udowodnij nierówność Bernouliego w następującym sformułowaniu:

Dla dowolnej naturalnej $n>1$ oraz dowolnej niezerowej liczby rzeczywistej $a>-1$ zachodzi nierówność:

$$(1+a)^n > 1+an\,.$$

312. Udowodnij, że liczba $\left(\frac{27}{8}\right)^{9/4}=\left(\frac{9}{4}\right)^{27/8}$ jest mniejsza od 16.

Rozwiązania zadań 300–306

300. $44=5!-76$ **301.** $47=7\cdot 6+5$ **302.** $48=\frac{7!}{5!}+6$ **303.** $4032=4!\cdot 4!\cdot 7$

304. Z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną zastosowaną do liczb a^2 i $q^2\cdot b^2$, gdzie liczba rzeczywista dodatnia q zostanie dobrana później, otrzymujemy

$$q\cdot ab \leqslant \frac{a^2+q^2\cdot b^2}{2}\,,$$

czyli

$$2q\cdot ab \leqslant a^2+q^2\cdot b^2\,. \tag{1}$$

Analogicznie uzyskujemy nierówność

$$2q\cdot de \leqslant q^2\cdot d^2+e^2\,. \tag{2}$$

Ponadto zastosowanie nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną do liczb $(1-q^2)\cdot b^2$ oraz $\frac{c^2}{2}$ daje

$$\sqrt{\frac{1-q^2}{2}}\cdot bc \leqslant \frac{(1-q^2)\cdot b^2+\frac{c^2}{2}}{2}\,,$$

czyli

$$\sqrt{2\cdot(1-q^2)}\cdot bc \leqslant \left(1-q^2\right)\cdot b^2+\frac{c^2}{2}\,. \tag{3}$$

Analogicznie

$$\sqrt{2\cdot(1-q^2)}\cdot cd \leqslant \frac{c^2}{2}+\left(1-q^2\right)\cdot d^2\,. \tag{4}$$

Dodając stronami nierówności (1), (2), (3) i (4) otrzymujemy

$$2q\cdot ab+\sqrt{2\cdot(1-q^2)}\cdot bc+\sqrt{2\cdot(1-q^2)}\cdot cd+2q\cdot de\leqslant a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\,,$$

co będzie stanowić nierówność podaną w treści zadania, jeżeli

$$2\cdot q=\sqrt{2\cdot(1-q^2)},\qquad 4\cdot q^2=2-2\cdot q^2,\qquad 6\cdot q^2=2,\qquad 3\cdot q^2=1\,,$$

czyli $q=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Przy tym stała D jest równa $2q=2/\sqrt{3}$.

Ponieważ w nierównościach (1), (2), (3) i (4) zachodzi równość przy

$$a^2=q^2\cdot b^2,\qquad \left(1-q^2\right)\cdot b^2=\frac{c^2}{2}=\left(1-q^2\right)\cdot d^2,\qquad q^2\cdot d^2=e^2\,,$$

stałej D nie można zwiększyć.

Istotnie, łatwo sprawdzić, że dla $a=e=1$, $b=d=\sqrt{3}$, $c=2$ w danej w zadaniu nierówności ze stałą $D=2/\sqrt{3}$ obie strony mają wartość 12.

305. Daną w treści zadania nierówność możemy przepisać w postaci

$$\frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}}>\frac{(n+2)^{n+2}}{(n+1)^{n+2}}\,,$$

czyli

$$(n+1)^{2n+3}>n^{n+1}\cdot(n+2)^{n+2}\,. \tag{5}$$

Mnożąc nierówność (5) stronami przez $n+1$ otrzymujemy nierówność równoważną

$$(n+1)^{2n+4}>(n+1)\cdot n^{n+1}\cdot(n+2)^{n+2}\,,$$

którą możemy zapisać jako

$$\left(n^2+2n+1\right)^{n+2}>\left(n^2+3n+2\right)\cdot\left(n^2+2n\right)^{n+1}\,. \tag{6}$$

Ponieważ po każdej ze stron nierówności (6) występuje iloczyn $n+2$ czynników o takiej samej sumie równej n^3+4n^2+5n+2, większą wartość ma ten iloczyn, którego czynniki są równe.

306. Przekształcamy daną w zadaniu nierówność:

$$\sqrt[33]{2}<\frac{128}{125},\qquad 2<\left(\frac{128}{125}\right)^{33},\qquad 2<\frac{2^{231}}{5^{99}},\qquad 2\cdot 5^{99}<2^{231},\qquad 5^{99}<2^{230}\,.$$

Dla dowodu ostatniej z powyższych nierówności rozważmy 35 liczb, z których 32 są równe $128-3=125$, a 3 są równe $128+32=160$. Na mocy nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną tych liczb otrzymujemy kolejno:

$$\sqrt[35]{125^{32}\cdot 160^3}<\frac{32\cdot(128-3)+3\cdot(128+32)}{32},\qquad \sqrt[35]{125^{32}\cdot 160^3}<128\,,$$

$$125^{32}\cdot 160^3<128^{35},\qquad 5^{96}\cdot 2^{15}\cdot 5^3<2^{245},\qquad 5^{99}<2^{230}\,.$$

Uwaga: Nierówność $5^{99}<2^{230}$ jest równoważna nierówności $\log_2 5<230/99$, a przy tym $\frac{230}{99}=2+\frac{32}{99}=2,(32)$. Zatem $\log_2 5<2,(32)$, co w połączeniu z oszacowaniem uzyskanym w rozwiązaniu zadania **299 (Trapez 33-34)** prowadzi do nierówności

$$2,3205<\log_2 5<2,3233\,.$$