Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO
TRAPEZ
Nr 36 (36/2015)
Piątek, 4 grudnia 2015 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **313**, **314** i **315** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

313. Zapisz liczbę 78 używając cyfr 5, 6 i 7 (każdej tylko raz).

314. Zapisz liczbę 90 używając cyfr 5, 6 i 7 (każdej tylko raz).

315. Zapisz liczbę 132 używając cyfr 5, 6 i 7 (każdej tylko raz).

Uzupełnianka pseudologarytmiczna V

316. Uzupełnij tabelkę wartości funkcji f takimi liczbami naturalnymi, aby spełnione były następujące warunki:
1° W zakresie tabelki f jest niemalejąca, czyli $f(n) \leqslant f(n+1)$ dla $n=2, 3, 4, \dots 79$.
2° Dla dowolnych liczb naturalnych m, n większych od 1 o iloczynie nie większym od 80 zachodzi równość $f(mn)=f(m)+f(n)$.
3° Przy zachowaniu warunków **1**° i **2**° suma liczb wpisanych w tabelkę jest możliwie najmniejsza.

n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$
2	9	**16**	36	**30**		**44**		**58**		**72**	
3		**17**		**31**		**45**		**59**		**73**	
4	18	**18**		**32**	45	**46**		**60**		**74**	
5		**19**		**33**		**47**		**61**		**75**	
6		**20**		**34**		**48**		**62**		**76**	
7		**21**		**35**		**49**		**63**		**77**	
8	27	**22**		**36**		**50**		**64**	54	**78**	
9		**23**		**37**		**51**		**65**		**79**	
10		**24**		**38**		**52**		**66**		**80**	
11		**25**		**39**		**53**		**67**			
12		**26**		**40**		**54**		**68**			
13		**27**		**41**		**55**		**69**			
14		**28**		**42**		**56**		**70**			
15		**29**		**43**		**57**		**71**			

Facebookowy konkurs Trapezu – Zadanie Tygodnia

Rozwiąż zadanie **316** i podaj w odpowiedzi liczby $f(43)$, $f(46)$ i $f(49)$.

Nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną

317. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c, d zachodzi nierówność

$$4\cdot(ab+bc+cd+da)\leqslant(a+b+c+d)^2\,.$$

Dla których liczb zachodzi równość?

318. Udowodnij nierówność Bernouliego w następującym sformułowaniu:

Dla dowolnej wymiernej $w>1$ oraz dowolnej niezerowej liczby rzeczywistej $a>-1$ zachodzi nierówność:

$$(1+a)^w>1+aw\,.$$

319. Udowodnij, że liczba $\left(\frac{256}{81}\right)^{64/27}=\left(\frac{64}{27}\right)^{256/81}$ jest mniejsza od 16.

Rozwiązania zadań 307–312

307. $49=56-7$ **308.** $77=7\cdot(5+6)$ **309.** $17=2^4+\frac{2}{2}=\sqrt{\frac{(4!)^2+2}{2}}$

310. $1058400=\frac{\sqrt{(7!)^4}}{4!}$

311. W przypadku, gdy $1+an\leqslant 0$, dowodzona nierówność jest oczywista, ograniczymy się więc do przypadku $1+an>0$. Rozważmy n liczb dodatnich, z których jedna jest równa $1+an$, a pozostałe są równe 1. Nierówność między średnią geometryczną i arytmetyczną zastosowana do tych liczb daje

$$\sqrt[n]{(1+an)\cdot 1^{n-1}}=\sqrt[n]{1+an}<\frac{(1+an)+(n-1)\cdot 1}{n}=1+a\,,$$

co po obustronnym podniesieniu do n-tej potęgi prowadzi do nierówności danej w treści zadania. Zwróćmy uwagę, że wobec $a\neq 0$ liczby $1+an$ oraz 1 są różne i dlatego nierówność jest ostra.

312. Daną w zadaniu nierówność przepisujemy kolejno jako:

$$\left(\frac{9}{4}\right)^{27/8}<16,\qquad \left(\frac{9}{4}\right)^{27}<16^8,\qquad \frac{3^{54}}{2^{54}}<2^{32},\qquad \frac{3^{27}}{2^{27}}<2^{16},\qquad 3^{27}<2^{43}\,. \tag{1}$$

Rozważmy 9 liczb, z których 4 są równe $32-5=27$, a 5 jest równych $32+4=36$. Na mocy nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną tych liczb otrzymujemy kolejno:

$$\sqrt[9]{27^4\cdot 36^5}<\frac{4\cdot(32-5)+5\cdot(32+4)}{9},\qquad \sqrt[9]{27^4\cdot 36^5}<32\,,$$

$$27^4\cdot 36^5<32^9,\qquad 3^{12}\cdot 2^{10}\cdot 3^{10}<2^{45},\qquad 3^{22}<2^{35}\,. \tag{2}$$

Mnożąc nierówność (2) stronami przez nierówność

$$243=\quad 3^5<2^8\quad =256$$

otrzymujemy nierówność (1).