

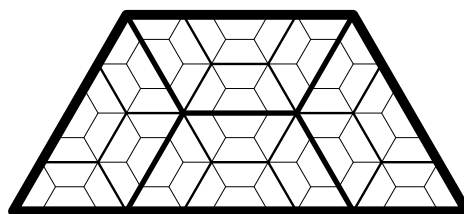
Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **313**, **314** i **315** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

313. Zapisz liczbę 78 używając cyfr 5, 6 i 7 (każdej tylko raz).

314. Zapisz liczbę 90 używając cyfr 5, 6 i 7 (każdej tylko raz).

315. Zapisz liczbę 132 używając cyfr 5, 6 i 7 (każdej tylko raz).



Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 36 (36/2015)

Piątek, 4 grudnia 2015 r.

Uzupełnianka pseudologarytmiczna V

316. Uzupełnij tabelkę wartości funkcji f takimi liczbami naturalnymi, aby spełnione były następujące warunki:

1° W zakresie tabelki f jest niemalejąca, czyli $f(n) \leq f(n+1)$ dla $n = 2, 3, 4, \dots, 79$.

2° Dla dowolnych liczb naturalnych m, n większych od 1 o iloczynie nie większym od 80 zachodzi równość $f(mn) = f(m) + f(n)$.

3° Przy zachowaniu warunków 1° i 2° suma liczb wpisanych w tabelkę jest możliwie najmniejsza.

n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$
2	9	16	36	30		44		58		72	
3		17		31		45		59		73	
4	18	18		32	45	46		60		74	
5		19		33		47		61		75	
6		20		34		48		62		76	
7		21		35		49		63		77	
8	27	22		36		50		64	54	78	
9		23		37		51		65		79	
10		24		38		52		66		80	
11		25		39		53		67			
12		26		40		54		68			
13		27		41		55		69			
14		28		42		56		70			
15		29		43		57		71			



Facebookowy konkurs Trapezu – Zadanie Tygodnia

Rozwiąż zadanie 316 i podaj w odpowiedzi liczby $f(43)$, $f(46)$ i $f(49)$.

Nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną

317. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c, d zachodzi nierówność

$$4 \cdot (ab + bc + cd + da) \leq (a + b + c + d)^2.$$

Dla których liczb zachodzi równość?

318. Udowodnij nierówność Bernoulliego w następującym sformułowaniu:

Dla dowolnej wymiernej $w > 1$ oraz dowolnej niezerowej liczby rzeczywistej $a > -1$ zachodzi nierówność:

$$(1 + a)^w > 1 + aw.$$

319. Udowodnij, że liczba $\left(\frac{256}{81}\right)^{64/27} = \left(\frac{64}{27}\right)^{256/81}$ jest mniejsza od 16.

Rozwiązania zadań 307–312

307. $49 = 56 - 7$ 308. $77 = 7 \cdot (5 + 6)$ 309. $17 = 2^4 + \frac{2}{2} = \sqrt{\frac{(4!)^2 + 2}{2}}$

310. $1058400 = \frac{\sqrt{(7!)^4}}{4!}$

311. W przypadku, gdy $1 + an \leq 0$, dowiedziona nierówność jest oczywista, ograniczymy się więc do przypadku $1 + an > 0$. Rozważmy n liczb dodatnich, z których jedna jest równa $1 + an$, a pozostałe są równe 1. Nierówność między średnią geometryczną i arytmetyczną zastosowana do tych liczb daje

$$\sqrt[n]{(1 + an) \cdot 1^{n-1}} = \sqrt[n]{1 + an} < \frac{(1 + an) + (n - 1) \cdot 1}{n} = 1 + a,$$

co po obustronnym podniesieniu do n -tej potęgi prowadzi do nierówności danej w treści zadania. Zwróćmy uwagę, że wobec $a \neq 0$ liczby $1 + an$ oraz 1 są różne i dlatego nierówność jest ostra.

312. Daną w zadaniu nierówność przepisujemy kolejno jako:

$$\left(\frac{9}{4}\right)^{27/8} < 16, \quad \left(\frac{9}{4}\right)^{27} < 16^8, \quad \frac{3^{54}}{2^{54}} < 2^{32}, \quad \frac{3^{27}}{2^{27}} < 2^{16}, \quad 3^{27} < 2^{43}. \quad (1)$$

Rozważmy 9 liczb, z których 4 są równe $32 - 5 = 27$, a 5 jest równych $32 + 4 = 36$. Na mocy nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną tych liczb otrzymujemy kolejno:

$$\sqrt[9]{27^4 \cdot 36^5} < \frac{4 \cdot (32 - 5) + 5 \cdot (32 + 4)}{9}, \quad \sqrt[9]{27^4 \cdot 36^5} < 32, \\ 27^4 \cdot 36^5 < 32^9, \quad 3^{12} \cdot 2^{10} \cdot 3^{10} < 2^{45}, \quad 3^{22} < 2^{35}. \quad (2)$$

Mnożąc nierówność (2) stronami przez nierówność

$$243 = 3^5 < 2^8 = 256$$

otrzymujemy nierówność (1).

