Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **320**, **321** i **322** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

320. Zapisz liczbę 140 używając cyfr 5, 6 i 7 (każdej tylko raz).

321. Zapisz liczbę 151 używając cyfr 5, 6 i 7 (każdej tylko raz).

322. Zapisz liczbę 168 używając cyfr 5, 6 i 7 (każdej tylko raz).

Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 37 (37/2015)

Piątek, 11 grudnia 2015 r.

Nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną

323. Udowodnij, że $\left(\frac{7}{2}\right)^{7/2} < 81$, czyli $3,5^{3,5} < 3^4$.

324. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c, d, e, f zachodzi nierówność

$$27\cdot(abc+bcd+cde+def+efa+fab)<(a+b+c+d+e+f)^3\,.$$

Facebookowy konkurs Trapezu – Zadanie Tygodnia

325. Wskaż liczby całkowite dodatnie a, b, c, d, e, f, dla których zachodzi nierówność

$$28\cdot(abc+bcd+cde+def+efa+fab)>(a+b+c+d+e+f)^3\,.$$

Rozwiązania zadań 313–319

313. $78=5!-6\cdot 7$ **314.** $90=\frac{7!}{56}$ **315.** $132=\sqrt{5^6}+7$

316. Z nierówności $f(9)\geqslant f(8)=27$ wynika $f(3)\geqslant 14$, a nierówność $f(27)\leqslant f(32)=45$ daje $f(3)\leqslant 15$. Gdyby $f(3)=15$, mielibyśmy $f(n)=45$ dla $27\leqslant n\leqslant 32$, skąd $f(7)=27$ oraz $f(5)=21$, co prowadzi do $f(49)=54>51=f(50)$. Zatem $f(3)=14$, co po spojrzeniu na $f(25)$ i $f(49)$ daje $f(5)=21$ i $f(7)=25$. Dalsze wypełnienie tabeli zgodnie z warunkami zadania nie nastręcza problemu.

n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$
2	9	**14**	34	**26**	42	**38**	47	**50**	51	**62**	53	**74**	55
3	14	**15**	35	**27**	42	**39**	47	**51**	51	**63**	53	**75**	56
4	18	**16**	36	**28**	43	**40**	48	**52**	51	**64**	54	**76**	56
5	21	**17**	37	**29**	43	**41**	48	**53**	51	**65**	54	**77**	56
6	23	**18**	37	**30**	44	**42**	48	**54**	51	**66**	54	**78**	56
7	25	**19**	38	**31**	44	**43**	48	**55**	52	**67**	54	**79**	56
8	27	**20**	39	**32**	45	**44**	49	**56**	52	**68**	55	**80**	57
9	28	**21**	39	**33**	45	**45**	49	**57**	52	**69**	55		
10	30	**22**	40	**34**	46	**46**	50	**58**	52	**70**	55		
11	31	**23**	41	**35**	46	**47**	50	**59**	52	**71**	55		
12	32	**24**	41	**36**	46	**48**	50	**60**	53	**72**	55		
13	33	**25**	42	**37**	46	**49**	50	**61**	53	**73**	55		

Uwaga: Z nierówności $f(27)\leqslant f(28)$ i $f(63)\leqslant f(64)$ wynika $5\cdot f(3)\leqslant 8\cdot f(2)=72$, skąd w inny sposób otrzymujemy $f(3)\leqslant 14$.

317. Po przekształceniu lewej strony dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać

$$4\cdot(a+c)\cdot(b+d)\leqslant(a+b+c+d)^2\,, \tag{1}$$

czyli

$$\sqrt{(a+c)\cdot(b+d)}\leqslant\frac{(a+c)+(b+d)}{2}\,,$$

a to jest nierówność między średnią geometryczną i arytmetyczną liczb $a+c$ oraz $b+d$. Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a+c=b+d$.

Uwaga: Zakładanie dodatniości liczb a, b, c, d nie jest konieczne. Nietrudno bowiem zauważyć, że nierówność (1) ma postać

$$4xy\leqslant(x+y)^2 \tag{2}$$

przy $x=a+c$ oraz $y=b+d$, a nierówność (2) można łatwo udowodnić dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y.

318. W przypadku, gdy $1+aw\leqslant 0$, dowodzona nierówność jest oczywista, ograniczymy się więc do przypadku $1+aw>0$. Zapiszmy $w=p/q$ w postaci ułamka o naturalnym liczniku i mianowniku. Ponieważ $w>1$, mamy przy tym $p>q$. Rozważmy p liczb dodatnich, z których q jest równych $1+aw$, a pozostałych $p-q$ jest równych 1. Nierówność między średnią geometryczną i arytmetyczną zastosowana do tych liczb daje

$$\sqrt[p]{(1+aw)^q\cdot 1^{p-q}}=\sqrt[p]{(1+aw)^q}<\frac{q\cdot(1+aw)+(p-q)\cdot 1}{p}=\frac{q+awq+p-q}{p}=\frac{p+ap}{p}=1+a\,.$$

Po obustronnym podniesieniu otrzymanej powyżej nierówności $\sqrt[p]{(1+aw)^q}<1+a$ do potęgi $w=p/q$ uzyskujemy nierówność podaną w treści zadania.

319. Daną w zadaniu nierówność przekształcamy następująco:

$$\left(\frac{64}{27}\right)^{256/81}<16,\qquad \left(\frac{64}{27}\right)^{256}<16^{81},\qquad \frac{2^{6\cdot 256}}{3^{3\cdot 256}}<2^{4\cdot 81},\qquad \frac{2^{128}}{3^{64}}<2^{27},\qquad 2^{101}<3^{64}\,. \tag{3}$$

Rozważmy 8 liczb, z których 5 jest równych $27-3=24$, a 3 są równe $27+5=32$. Na mocy nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną tych liczb otrzymujemy kolejno:

$$\sqrt[8]{24^5\cdot 32^3}<\frac{5\cdot(27-3)+3\cdot(27+5)}{8},\qquad \sqrt[8]{24^5\cdot 32^3}<27\,,$$

$$24^5\cdot 32^3<27^8,\qquad 2^{15}\cdot 3^5\cdot 2^{15}<3^{24},\qquad 2^{30}<3^{19},\qquad 2^{90}<3^{57}\,. \tag{4}$$

Mnożąc nierówność (4) stronami przez nierówność

$$2048=\quad 2^{11}<3^7\quad =2187$$

otrzymujemy nierówność (3).

Uwaga: Umiejętne wykorzystanie nierówności między średnimi pozwala udowodnić nierówność $2^{11}<3^7$ bez wykonywania bezpośrednich obliczeń na liczbach większych od 12.

W tym celu rozważamy następujące cztery liczby: 8, 8, 8, 12. Ponieważ liczby te można zapisac jako $9-1$, $9-1$, $9-1$ i $9+3$, ich średnia arytmetyczna jest równa 9. Na mocy nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną tych liczb otrzymujemy kolejno:

$$\sqrt[4]{8^3\cdot 12}<9\,,\qquad 8^3\cdot 12<9^4\,,\qquad 2^9\cdot 2^2\cdot 3<3^8\,,\qquad 2^{11}<3^7\,.$$