Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO
TRAPEZ
Nr 38 (38/2015)
Piątek, 18 grudnia 2015 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **326**, **327**, **328** i **329** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

326. Zapisz liczbę 216 używając cyfr 5, 6 i 7 (każdej tylko raz).

327. Zapisz liczbę 223 używając cyfr 5, 6 i 7 (każdej tylko raz).

328. Zapisz liczbę 342 używając cyfr 5, 6 i 7 (każdej tylko raz).

Facebookowy konkurs Trapezu – Zadanie Tygodnia

329. Zapisz jak największą liczbę całkowitą mniejszą od 10^7 używając cyfr 4, 4 i 7. Przez *jak największą* rozumiemy *największą spośród liczb zapisanych przez uczestników konkursu.* Tym razem osoby biorące udział w konkursie mogą odpowiadać wielokrotnie.

Nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną

330. Udowodnij, że $3^{3^4} > 4^{4^3}$.

331. Udowodnij, że $\sqrt[45]{45} > 1,08$.

Rozwiązania zadań 320–325

320. $140 = \frac{5!\cdot 7}{6}$ **321.** $151 = \frac{6!}{5} + 7$ **322.** $168 = \frac{7!}{5\cdot 6}$

323. Przepisujemy daną nierówność w postaci równoważnej:

$$\left(\frac{7}{2}\right)^7 < 81^2\,, \qquad \frac{7^7}{2^7} < 3^8\,, \qquad 7^7 < 2^7\cdot 3^8\,. \tag{1}$$

Rozważmy siedem liczb, z których jedna jest równa $48-6=42$, a sześć jest równych $48+1=49$. Na mocy nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną tych liczb otrzymujemy kolejno:

$$\sqrt[7]{42\cdot 49^6} < \frac{(48-6)+6\cdot(48+1)}{7}\,, \qquad \sqrt[7]{42\cdot 49^6} < 48\,,$$

$$42\cdot 49^6 < 48^7\,, \qquad 2\cdot 3\cdot 7\cdot 7^{12} < 2^{28}\cdot 3^7\,, \qquad 7^{13} < 2^{27}\cdot 3^6\,,$$

$$7^{91} < 2^{189}\cdot 3^{42}\,. \tag{2}$$

Podobnie, rozważmy 49 liczb, z których 19 jest równych $324-30=294$, a 30 jest równych $324+19=343$. Na mocy nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną tych liczb dostajemy kolejno:

$$\sqrt[49]{294^{19}\cdot 343^{30}} < \frac{19\cdot(324-30)+30\cdot(324+19)}{49}\,, \qquad \sqrt[49]{294^{19}\cdot 343^{30}} < 324\,,$$

$$294^{19}\cdot 343^{30} < 324^{49}\,, \qquad 2^{19}\cdot 3^{19}\cdot 7^{38}\cdot 7^{90} < 2^{98}\cdot 3^{196}\,, \qquad 7^{128} < 2^{79}\cdot 3^{177}\,,$$

$$7^{256} < 2^{158}\cdot 3^{354}\,. \tag{3}$$

Mnożąc stronami nierówności (2), (3) oraz nierówność

$$343 = \quad 7^3 < 2^3\cdot 3^4 \quad = 648$$

otrzymujemy

$$7^{350} < 2^{350}\cdot 3^{400}\,,$$

co po obustronnym spierwiastkowaniu stopnia 50 daje nierówność (1).

324. Korzystając z tożsamości

$$(abc+bcd+cde+def+efa+fab)+ace+bdf=(a+d)\cdot(b+e)\cdot(c+f)$$

oraz z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną możemy następująco oszacować lewą stronę danej w zadaniu nierówności:

$$27\cdot(abc+bcd+cde+def+efa+fab)<27\cdot(a+d)\cdot(b+e)\cdot(c+f)=$$

$$=27\cdot\left(\sqrt[3]{(a+d)\cdot(b+e)\cdot(c+f)}\right)^3\leqslant 27\cdot\left(\frac{(a+d)+(b+e)+(c+f)}{3}\right)^3=(a+b+c+d+e+f)^3,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

325. Z rozwiązania zadania **324** wynika, że podana w tezie tego zadania nierówność

$$27\cdot(abc+bcd+cde+def+efa+fab)<(a+b+c+d+e+f)^3$$

stałaby się równością, gdyby dopuścić nieujemne liczby a, b, c, d, e, f i dobrać je tak, aby $ace=bdf=0$ oraz $a+d=b+e=c+f$, na przykład zakładając $e=f=0$ oraz $a+d=b=c$. Ponieważ jednak warunki zadania wymagają, aby liczby a, b, c, d, e, f były dodatnie, dobierzemy je tak, aby liczby e i f były możliwie małe.

W rozwiązywanym zadaniu liczby a, b, c, d, e, f mają być ponadto całkowite. Dla uproszczenia przyjmiemy więc $d=e=f=1$ oraz $a=b=c=n$, gdzie n jest odpowiednio dużą liczbą naturalną. Wówczas dana w zadaniu nierówność

$$28\cdot(abc+bcd+cde+def+efa+fab)>(a+b+c+d+e+f)^3 \qquad (4)$$

przyjmuje postać

$$28n^3+56n^2+56n+28>27n^3+81n^2+81n+27\,,$$

czyli

$$n^3+1>25n^2+25n\,,$$

co po podzieleniu stronami przez $n+1$ daje kolejno

$$n^2-n+1>25n\,, \qquad n^2+1>26n\,.$$

Łatwo zauważyć, że powyższa nierówność jest prawdziwa dla $n\geqslant 26$.

Odpowiedź: Przykładem liczb spełniających warunki zadania są liczby $a=b=c=26$ i $d=e=f=1$.

Uwagi: Można wyliczyć, że dla podanej w odpowiedzi szóstki liczb nierówność (4) przyjmuje postać $531468>531441$.

Okazuje się, że nierówność (4) przyjmuje powyższą postać także dla szóstek liczb określonych wzorami $b=c=26$, $e=f=1$ oraz $d=27-a$. Dzieje się tak dlatego, że prawa strona nierówności (4) zależy tylko od sumy $a+b+c+d+e+f$, która dla tych szóstek liczb ma stałą wartość równą 81, natomiast sumę występującą po lewej stronie nierówności (4) możemy przepisać jako

$$abc+bcd+cde+def+efa+fab=(a+d)\cdot(bc+ce+ef)+a\cdot(bf-ce)\,,$$

skąd widać, że przy $bf=ce$ zależy ona od $a+d$, a nie od samych a i d.

Nietrudno też zauważyć, że stałą 28 występującą po lewej stronie nierówności (4) można zamienić na dowolną inną stałą większą od 27 – istotna część rozwiązania pozostanie wówczas niezmieniona.