Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 39 (39/2015)

Środa, 23 grudnia 2015 r.

Łamigłówki i zadania na Święta

W łamigłówkach **332**, **333** i **334** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

332. Zapisz liczbę 63 używając cyfr 1, 2 i 3 (każdej tylko raz). Podaj dwa istotnie różne rozwiązania.

333. Zapisz liczbę 66 używając cyfr 0, 3 i 5 (każdej tylko raz).

334. Zapisz liczbę 66 używając cyfr 0, 5 i 7 (każdej tylko raz).

Uzupełnianka pseudologarytmiczna VI

335. Uzupełnij tabelkę wartości funkcji f takimi liczbami naturalnymi, aby spełnione były następujące warunki:
1° W zakresie tabelki f jest niemalejąca, czyli $f(n) \leqslant f(n+1)$ dla $n=2, 3, 4, \dots 98$.
2° Dla dowolnych liczb naturalnych m, n większych od 1 o iloczynie nie większym od 99 zachodzi równość $f(mn)=f(m)+f(n)$.
3° Przy zachowaniu warunków **1**° i **2**° suma liczb wpisanych w tabelkę jest możliwie najmniejsza.

n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$
2	10	**16**	40	**30**		**44**		**58**		**72**		**86**	
3		**17**		**31**		**45**		**59**		**73**		**87**	
4	20	**18**		**32**	50	**46**		**60**		**74**		**88**	
5		**19**		**33**		**47**		**61**		**75**		**89**	
6		**20**		**34**		**48**		**62**		**76**		**90**	
7		**21**		**35**		**49**		**63**		**77**		**91**	
8	30	**22**		**36**		**50**		**64**	60	**78**		**92**	
9		**23**		**37**		**51**		**65**		**79**		**93**	
10		**24**		**38**		**52**		**66**		**80**		**94**	
11		**25**		**39**		**53**		**67**		**81**		**95**	
12		**26**		**40**		**54**		**68**		**82**		**96**	
13		**27**		**41**		**55**		**69**		**83**		**97**	
14		**28**		**42**		**56**		**70**		**84**		**98**	
15		**29**		**43**		**57**		**71**		**85**		**99**	

Facebookowy konkurs Trapezu – Zadanie Tygodnia

Rozwiąż zadanie **335** i podaj w odpowiedzi liczby $f(78)$, $f(95)$ i $f(99)$.

Nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną

336. Udowodnij, że $2^{2^{174}} < 3^{3^{110}}$.

Rozwiązania zadań 326–331

326. $216 = \sqrt{\sqrt{6^{7+5}}}$ **327.** $223 = \sqrt{7^6} - 5!$ **328.** $342 = 57 \cdot 6$

329. $9979200 = \dfrac{(7+4)!}{4}$

330. Daną w zadaniu nierówność zapisujemy jako

$$3^{81} > 2^{128}\,. \tag{1}$$

Rozważmy 40 liczb, z których 13 jest równych $243-27=216$, a 27 jest równych $243+13=256$. Na mocy nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną tych liczb otrzymujemy kolejno:

$$\sqrt[40]{216^{13}\cdot 256^{27}} < \frac{13\cdot(243-27)+27\cdot(243+13)}{40}\,, \qquad \sqrt[40]{216^{13}\cdot 256^{27}} < 243\,,$$

$$216^{13}\cdot 256^{27} < 243^{40}\,, \qquad 2^{39}\cdot 3^{39}\cdot 2^{216} < 3^{200}\,, \qquad 2^{255} < 3^{161}\,. \tag{2}$$

Mnożąc nierówność (2) stronami przez nierówność $2<3$ i wyciągając obustronnie pierwiastek kwadratowy, dostajemy nierówność (1).

Uwagi: Będąca przedmiotem zadania nierówność (1) ma po obu stronach liczby 39-cyfrowe. W przybliżeniu wygląda ona następująco: $4,43\cdot 10^{38} > 3,40\cdot 10^{38}$, a więc iloraz lewej strony do prawej jest w przybliżeniu równy $1,30$.

Z kolei nierówność (2) ma po obu stronach liczby 77-cyfrowe i w przybliżeniu sprowadza się do nierówności $5,79\cdot 10^{76} < 6,55\cdot 10^{76}$ o ilorazie prawej strony do lewej równym w przybliżeniu $1,13$. Należy zwrócić uwagę, że nierówność ta daje oszacowanie

$$\log_2 3 > \frac{255}{161}\,,$$

co w przybliżeniu można zapisać jako:

$$1,58496 > 1,58385\,.$$

331. Przekształcamy daną w zadaniu nierówność:

$$\sqrt[45]{45} > \frac{27}{25}\,, \qquad 45 > \left(\frac{27}{25}\right)^{45}\,,$$

$$3^2\cdot 5 > \frac{3^{135}}{5^{90}}\,, \qquad 5^{91} > 3^{133}\,, \qquad 5^{13} > 3^{19}\,. \tag{3}$$

Rozważmy 9 liczb, z których 4 są równe $50-5=45$, a 5 jest równych $50+4=54$. Na mocy nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną tych liczb otrzymujemy kolejno:

$$\sqrt[9]{45^4\cdot 54^5} < \frac{4\cdot(50-5)+5\cdot(50+4)}{9}\,, \qquad \sqrt[9]{45^4\cdot 54^5} < 50\,,$$

$$45^4\cdot 54^5 < 50^9\,, \qquad 3^8\cdot 5^4\cdot 2^5\cdot 3^{15} < 2^9\cdot 5^{18}\,, \qquad 3^{23} < 2^4\cdot 5^{14}\,. \tag{4}$$

Mnożąc nierówność (4) stronami przez nierówność

$$80 = \quad 2^4\cdot 5 < 3^4 \quad = 81$$

i dzieląc wynik obustronnie przez $2^4\cdot 3^4\cdot 5$ dostajemy nierówność (3).