Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 40 (40/2015)

Czwartek, 31 grudnia 2015 r.

Łamigłówki i zadania na Nowy Rok

W łamigłówkach **337–342** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

337. Zapisz liczbę 2016 używając czterokrotnie cyfry 9. Podaj dwa istotnie różne rozwiązania.

338. Zapisz liczbę 2016 używając cyfr 2, 3, 4 i 5 (każdej tylko raz). Podaj sześć istotnie różnych rozwiązań.

339. Zapisz liczbę 2016 używając cyfr 3, 4, 4 i 4. Podaj trzy istotnie różne rozwiązania.

340. Zapisz liczbę 2016 używając cyfr 1, 3, 5 i 6 (każdej tylko raz). Podaj dwa istotnie różne rozwiązania.

341. Zapisz liczbę 2016 używając cyfr 2, 5, 9 i 9. Podaj dwa istotnie różne rozwiązania.

Facebookowy konkurs Trapezu – Zadanie Tygodnia

342. Zapisz jak największą liczbę całkowitą mniejszą od 10^6 używając cyfr 3, 4 i 4. Przez *jak największą* rozumiemy *największą spośród liczb zapisanych przez uczestników konkursu.* Tym razem osoby biorące udział w konkursie mogą odpowiadać wielokrotnie.

Nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną

343. Udowodnij, że $2^{2^{35}} < 3^{3^{22}}$.

344. Która liczba jest większa:

$$\left(3-2\sqrt[4]{5}\right)^{35} \quad \text{czy} \quad \left(4\sqrt[3]{2}-5\right)^{51} \ ?$$

Rozwiązania zadań 332–336

332. $63 = 21 \cdot 3 = 2^{3!} - 1$ **333.** $66 = 3! \cdot \sqrt{5!+0!}$ **334.** $66 = \sqrt{7!+0!} - 5$

335. Z warunków $f(9) \geqslant f(8) = 30$ oraz $f(27) \leqslant f(32) = 50$ wynika $15 \leqslant f(3) \leqslant 16$. W przypadku $f(3) = 15$ mielibyśmy $f(n) = 45$ dla $24 \leqslant n \leqslant 27$, co jest niemożliwe, gdyż liczba $f(25) = 2 \cdot f(5)$ jest parzysta. Zatem $f(3) = 16$. Z nierówności $f(49) \geqslant f(48) = 56$ oraz $f(63) \leqslant f(64) = 60$ otrzymujemy $f(7) = 28$, co prowadzi do następujących wartości funkcji f:

n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$
2	10	**16**	40	**30**		**44**		**58**		**72**	62	**86**	
3	16	**17**		**31**		**45**		**59**		**73**		**87**	
4	20	**18**	42	**32**	50	**46**		**60**		**74**		**88**	
5		**19**		**33**		**47**		**61**		**75**		**89**	
6	26	**20**		**34**		**48**	56	**62**		**76**		**90**	
7	28	**21**	44	**35**		**49**	56	**63**	60	**77**		**91**	
8	30	**22**		**36**	52	**50**		**64**	60	**78**		**92**	
9	32	**23**		**37**		**51**		**65**		**79**		**93**	
10		**24**	46	**38**		**52**		**66**		**80**		**94**	
11		**25**		**39**		**53**		**67**		**81**	64	**95**	
12	36	**26**		**40**		**54**	58	**68**		**82**	64	**96**	66
13		**27**	48	**41**	54	**55**	58	**69**		**83**	64	**97**	66
14	38	**28**	48	**42**	54	**56**	58	**70**		**84**	64	**98**	66
15		**29**		**43**		**57**		**71**		**85**		**99**	

Z nierówności $46 \leqslant f(25) \leqslant 48$ wnioskujemy, że $23 \leqslant f(5) \leqslant 24$, a równość $f(55)=58$ daje $f(11)=58-f(5)$. Zauważmy, że $f(75)=16+2\cdot f(5)$ oraz $f(77)=28+58-f(5)=86-f(5)$, co wobec nierówności $f(75) \leqslant f(77)$ daje $3\cdot f(5) \leqslant 70$, czyli $f(5) \leqslant 23$. Wobec tego $f(5)=23$ i dalsze wypełnianie tabelki przebiega bez większych trudności:

n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$
2	10	**16**	40	**30**	49	**44**	55	**58**	58	**72**	62	**86**	64
3	16	**17**	41	**31**	49	**45**	55	**59**	58	**73**	62	**87**	64
4	20	**18**	42	**32**	50	**46**	55	**60**	59	**74**	62	**88**	65
5	23	**19**	42	**33**	51	**47**	55	**61**	59	**75**	62	**89**	65
6	26	**20**	43	**34**	51	**48**	56	**62**	59	**76**	62	**90**	65
7	28	**21**	44	**35**	51	**49**	56	**63**	60	**77**	63	**91**	65
8	30	**22**	45	**36**	52	**50**	56	**64**	60	**78**	63	**92**	65
9	32	**23**	45	**37**	52	**51**	57	**65**	60	**79**	63	**93**	65
10	33	**24**	46	**38**	52	**52**	57	**66**	61	**80**	63	**94**	65
11	35	**25**	46	**39**	53	**53**	57	**67**	61	**81**	64	**95**	65
12	36	**26**	47	**40**	53	**54**	58	**68**	61	**82**	64	**96**	66
13	37	**27**	48	**41**	54	**55**	58	**69**	61	**83**	64	**97**	66
14	38	**28**	48	**42**	54	**56**	58	**70**	61	**84**	64	**98**	66
15	39	**29**	48	**43**	54	**57**	58	**71**	61	**85**	64	**99**	67

336. *Sposób I:* Dana w zadaniu nierówność jest kolejno równoważna następującym nierównościom:

$$2^{6\cdot 2^{174}} < 3^{6\cdot 3^{110}}, \qquad 2^{3\cdot 2^{175}} < 3^{2\cdot 3^{111}}, \qquad 8^{2^{175}} < 9^{3^{111}}. \tag{1}$$

Rozważmy 32 liczby, z których 15 jest równych $81-17=64$, a pozostałych 17 jest równych $81+15=96$. Na mocy nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną tych liczb otrzymujemy kolejno:

$$\sqrt[32]{64^{15}\cdot 96^{17}} < \frac{15\cdot(81-17)+17\cdot(81+15)}{32}, \qquad \sqrt[32]{64^{15}\cdot 96^{17}} < 81,$$

$$64^{15}\cdot 96^{17} < 81^{32}, \qquad 2^{90}\cdot 2^{85}\cdot 3^{17} < 3^{128}, \qquad 2^{175} < 3^{111},$$

co dowodzi nierówności (1).

Sposób II: Wystarczy udowodnić nierówność

$$2^{174} < 3^{110},$$

czyli

$$2^{87} < 3^{55}. \tag{2}$$

W rozwiązaniu zadania **330 (Trapez 39)** udowodniliśmy, że

$$2^{255} < 3^{161}. \tag{3}$$

Mnożąc nierówność (3) stronami przez nierówność $2^6 < 3^4$ otrzymujemy

$$2^{261} < 3^{165},$$

co po obustronnym wyciągnięciu pierwiastka sześciennego daje (2).