Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 41 (1/2016)

Piątek, 8 stycznia 2016 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **345**, **346**, **347** i **348** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

345. Zapisz liczbę 2016 używając cyfr 4, 6 i 9 (każdej tylko raz). Podaj dwa istotnie różne rozwiązania.

346. Zapisz liczbę 2016 używając cyfr 4, 4 i 8. Podaj dwa istotnie różne rozwiązania.

347. Zapisz liczbę 2016 używając cyfr 2, 5 i 7 (każdej tylko raz).

Facebookowy konkurs Trapezu – Zadanie Tygodnia

348. Zapisz liczbę 29 używając cyfr 0, 0, 8 i 9.

Nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną

349. Udowodnij, że $\sqrt[9]{100}>\frac{5}{3}$.

350. Która liczba jest większa:

$$\left(3-2\sqrt[4]{5}\right)^{52} \quad \text{czy} \quad \left(4\sqrt[3]{2}-5\right)^{75}\ ?$$

351. Wskaż taką liczbę rzeczywistą dodatnią C, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$(n+49)^{50}\cdot(n+25\cdot C)^{24}>(n+50)^{49}\cdot(n+24\cdot C)^{25}\,.$$

352. Wskaż taką liczbę rzeczywistą dodatnią C, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$(n+49)^{50}\cdot(n+25\cdot C)^{24}<(n+50)^{49}\cdot(n+24\cdot C)^{25}\,.$$

Rozwiązania zadań 337–344

337. $2016=\dfrac{9!+9!\cdot\sqrt{9}}{\left(\left(\sqrt{9}\right)!\right)!}=\left(\left(\sqrt{9}\right)!\right)!+\left(\left(\sqrt{9}\right)!\right)^{\sqrt{9}}\cdot\left(\sqrt{9}\right)!$

338. $2016=(5!+3!)\cdot 2^4=\dfrac{(2\cdot 4)!\cdot 3!}{5!}=((5-2)!)!+(3!)^4=\dfrac{(2^3)!}{4\cdot 5}=4!\cdot\left(5!-(3!)^2\right)=\dfrac{(3+4)!\cdot 2}{5}$

339. $2016=\dfrac{\left(\sqrt{4^3}\right)!}{4!-4}=4!\cdot 4\cdot(4!-3)=3\cdot 4!\cdot(4!+4)$

340. $2016=(5!+3!)\cdot 16=6^{5-1}+(3!)!$

341. $2016=(5\cdot 9)^2-9=\dfrac{\left(\left(\sqrt{9}\right)!+2\right)!\cdot\left(\sqrt{9}\right)!}{5!}$

342. $995328=(4!)^4\cdot 3$

343. Dana w zadaniu nierówność jest kolejno równoważna następującym nierównościom:

$$2^{6\cdot 2^{35}} < 3^{6\cdot 3^{22}}, \qquad 2^{3\cdot 2^{36}} < 3^{2\cdot 3^{23}}, \qquad 8^{2^{36}} < 9^{3^{23}}. \tag{1}$$

Korzystając z udowodnionej w rozwiązaniu zadania **319 (Trapez 37)** nierówności $2^{11} < 3^7$ otrzymujemy

$$2^{33} < 3^{21}. \tag{2}$$

Obustronne pomnożenie nierówności (2) przez nierówność $2^3 < 3^2$ daje $2^{36} < 3^{23}$, skąd łatwo wynika nierówność (1).

Uwaga: Można sprawdzić, że $2^{35} > 3^{22}$, a zatem metoda użyta w sposobie II rozwiązania zadania **336 (Trapez 40)** w tym wypadku nie zadziała.

344. Korzystając dwukrotnie ze wzoru na różnicę kwadratów otrzymujemy

$$3-2\sqrt[4]{5}=\frac{81-80}{\left(3+2\sqrt[4]{5}\right)\cdot\left(9+4\sqrt{5}\right)}=\frac{1}{\left(3+\sqrt[4]{80}\right)\cdot\left(9+\sqrt{80}\right)}>\frac{1}{\left(3+\sqrt[4]{81}\right)\cdot\left(9+\sqrt{81}\right)}=\frac{1}{108}.$$

Z kolei wzór na różnicę sześcianów prowadzi do

$$4\sqrt[3]{2}-5=\frac{128-125}{16\sqrt[3]{4}+5\cdot 4\sqrt[3]{2}+25}=\frac{3}{\sqrt[3]{128^2}+5\cdot\sqrt[3]{128}+25}<\frac{3}{\sqrt[3]{125^2}+5\cdot\sqrt[3]{125}+25}=\frac{1}{25}.$$

Wykażemy, że

$$108^{35} < 25^{51},$$

czyli

$$2^{70}\cdot 3^{105} < 5^{102}. \tag{3}$$

Rozważmy liczby 24, 24 i 27. Ich średnia arytmetyczna jest równa 25, a średnia geometryczna

$$\sqrt[3]{24^2\cdot 27}.$$

Z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną otrzymujemy

$$\sqrt[3]{24^2\cdot 27} < 25, \qquad 24^2\cdot 27 < 25^3, \qquad 2^6\cdot 3^5 < 5^6,$$

co po obustronnym podniesieniu do potęgi 21 prowadzi do

$$2^{126}\cdot 3^{105} < 5^{126}. \tag{4}$$

Na podstawie nierówności $125 < 128$ mamy $5^3 < 2^7$, skąd

$$5^{24} < 2^{56}. \tag{5}$$

Wymnożenie stronami nierówności (4) i (5) daje

$$2^{126}\cdot 3^{105}\cdot 5^{24} < 2^{56}\cdot 5^{126},$$

co po uproszczeniu prowadzi do nierówności (3).

Łącząc uzyskane nierówności otrzymujemy

$$\left(3-2\sqrt[4]{5}\right)^{35} > \frac{1}{108^{35}} > \frac{1}{25^{51}} > \left(4\sqrt[3]{2}-5\right)^{51}.$$

Odpowiedź: $\left(3-2\sqrt[4]{5}\right)^{35} > \left(4\sqrt[3]{2}-5\right)^{51}$.