Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 42 (2/2016)

Piątek, 15 stycznia 2016 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **353**, **354**, **355** i **356** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

353. Zapisz liczbę 12 używając czterokrotnie cyfry 7.

354. Zapisz liczbę 24 używając czterokrotnie cyfry 7.

355. Zapisz liczbę 28 używając czterokrotnie cyfry 7. Podaj dwa istotnie różne rozwiązania.

Facebookowy konkurs Trapezu – Zadanie Tygodnia

356. Zapisz jak największą liczbę całkowitą mniejszą od 10^8 używając cyfr 3, 4 i 4. Przez *jak największą* rozumiemy *największą spośród liczb zapisanych przez uczestników konkursu*. Tym razem osoby biorące udział w konkursie mogą odpowiadać wielokrotnie.

Zadania wokół chińskiego twierdzenia o resztach

357. Znajdź cztery kolejne liczby całkowite dodatnie podzielne odpowiednio przez 2, 3, 5 i 7.

358. Znajdź taką liczbę całkowitą dodatnią n, że liczba $2n$ jest kwadratem, liczba $3n$ jest sześcianem, a liczba $5n$ jest piątą potęgą liczby całkowitej.

359. Czy istnieje taka liczba całkowita dodatnia n, że liczba n^2-1 jest podzielna przez 77, ale żadna z liczb $n-1$, $n+1$ nie jest podzielna przez 77?

360. Znajdź takie liczby całkowite dodatnie a, b, c, że liczby a^3, b^4, c^5 są długościami boków trójkąta prostokątnego.

Rozwiązania zadań 345–352

345. $2016=\dfrac{9!\cdot 4}{6!}=6^4+\left(\left(\sqrt{9}\right)!\right)!$

346. $2016=4!\cdot 84=\dfrac{8!}{4!-4}$

347. $2016=\dfrac{7!\cdot 2}{5}$

348. $29=\sqrt{\dfrac{(8-0!)!}{\left(\sqrt{9}\right)!}+0!}$

349. Przekształcamy daną w zadaniu nierówność:

$$\left(\frac{5}{3}\right)^9<100\,,\qquad \frac{5^9}{3^9}<2^2\cdot 5^2\,,\qquad 5^7<2^2\cdot 3^9\,. \tag{1}$$

Aby udowodnić nierówność (1), udowodnimy najpierw dwie pomocnicze nierówności. Dowody te będą oparte na nierówności między średnimi.

Rozważmy 25 liczb, z których 9 jest równych $216-16=200$, a pozostałych 16 jest równych $216+9=225$. Na mocy nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną tych liczb otrzymujemy kolejno:

$$\sqrt[25]{200^9\cdot 225^{16}}<\frac{9\cdot(216-16)+16\cdot(216+9)}{25}\,,\qquad \sqrt[25]{200^9\cdot 225^{16}}<216\,,$$

$$200^9\cdot 225^{16}<216^{25}\,,\quad 2^{27}\cdot 5^{18}\cdot 3^{32}\cdot 5^{32}<2^{75}\cdot 3^{75}\,,\quad 5^{50}<2^{48}\cdot 3^{43}\,,\quad 5^{100}<2^{96}\cdot 3^{86}\,. \tag{2}$$

Rozważmy 10 liczb, z których 7 jest równych $243-3=240$, a 3 są równe $243+7=250$. Na mocy nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną tych liczb dostajemy kolejno:

$$\sqrt[10]{240^7\cdot 250^3}<\frac{7\cdot(243-3)+3\cdot(243+7)}{10}\,,\qquad \sqrt[10]{240^7\cdot 250^3}<243\,,$$

$$240^7\cdot 250^3<243^{10}\,,\quad 2^{28}\cdot 3^7\cdot 5^7\cdot 2^3\cdot 5^9<3^{50}\,,\quad 2^{31}\cdot 5^{16}<3^{43}\,,\quad 2^{62}\cdot 5^{32}<3^{86}\,. \tag{3}$$

Wymnożenie stronami nierówności (2), (3) oraz nierówności $3\cdot 5<2^4$ prowadzi do

$$2^{62}\cdot 3\cdot 5^{133}<2^{100}\cdot 3^{172}\,,\qquad \text{czyli}\qquad 5^{133}<2^{38}\cdot 3^{171}\,,$$

co po obustronnym spierwiastkowaniu stopnia 19 daje nierówność (1).

350. Korzystając dwukrotnie ze wzoru na różnicę kwadratów otrzymujemy

$$3-2\sqrt[4]{5}=\frac{1}{\left(3+\sqrt[4]{80}\right)\cdot\left(9+\sqrt{80}\right)}<\frac{1}{\left(\sqrt[4]{80}+\sqrt[4]{80}\right)\cdot\left(\sqrt{80}+\sqrt{80}\right)}=\frac{1}{4\cdot\sqrt[4]{80^3}}=\frac{1}{2^5\cdot 5^{3/4}}\,.$$

Z kolei wzór na różnicę sześcianów prowadzi do

$$4\sqrt[3]{2}-5=\frac{3}{\sqrt[3]{128^2}+5\cdot\sqrt[3]{128}+25}>\frac{3}{\sqrt[3]{128^2}+\sqrt[3]{128}\cdot\sqrt[3]{128}+\sqrt[3]{128^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{128^2}}=\frac{1}{2^{14/3}}\,.$$

Wykażemy, że

$$\left(2^5\cdot 5^{3/4}\right)^{52}>\left(2^{14/3}\right)^{75}\,,$$

co można przepisać kolejno jako

$$2^{260}\cdot 5^{39}>2^{350}\,,\qquad 5^{39}>2^{90}\,,\qquad 5^{13}>2^{30}\,. \tag{4}$$

Rozważmy 28 liczb, z których 3 są równe $125-25=100$, a 25 jest równych $125+3=128$. Wówczas ich średnia arytmetyczna jest równa 125, a średnia geometryczna

$$\sqrt[28]{100^3\cdot 128^{25}}\,.$$

Na mocy nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną otrzymujemy kolejno:

$$100^3\cdot 128^{25}<125^{28}\,,\qquad 2^6\cdot 5^6\cdot 2^{175}<5^{84}\,,\qquad 2^{181}<5^{78}\,,$$

skąd tym bardziej

$$2^{180}<5^{78}\,,$$

co po obustronnym spierwiastkowaniu stopnia 6 daje nierówność (4).

Łącząc uzyskane nierówności otrzymujemy

$$\left(3-2\sqrt[4]{5}\right)^{52}<\frac{1}{\left(2^5\cdot 5^{3/4}\right)^{52}}<\frac{1}{\left(2^{14/3}\right)^{75}}<\left(4\sqrt[3]{2}-5\right)^{75}\,.$$

Odpowiedź: $\left(3-2\sqrt[4]{5}\right)^{52}<\left(4\sqrt[3]{2}-5\right)^{75}$.

351. Zauważmy, że po każdej ze stron danej w zadaniu nierówności występuje iloczyn 74 czynników dodatnich o takiej samej sumie równej $74n+49\cdot 50+24\cdot 25\cdot C$. Jeżeli w jednym z tych iloczynów wszystkie czynniki będą równe, to ten iloczyn będzie większy. Stąd wynika, że nierówność jest prawdziwa, gdy $49=25\cdot C$, czyli $C=49/25$.

352. Analogiczne rozumowanie jak w zadaniu poprzednim prowadzi do $50=24\cdot C$, czyli $C=50/24=25/12$.