Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 43 (3/2016)

Piątek, 22 stycznia 2016 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **361**, **362**, **363** i **364** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

361. Zapisz liczbę 64 używając czterokrotnie cyfry 7.

362. Zapisz liczbę 103 używając czterokrotnie cyfry 7.

363. Zapisz liczbę 105 używając czterokrotnie cyfry 7.

Facebookowy konkurs Trapezu – Zadanie Tygodnia

364. Zapisz jak najmniejszą liczbę całkowitą większą od 10^8 używając cyfr 4, 4, 4 i 5. Przez *jak najmniejszą* rozumiemy *najmniejszą spośród liczb zapisanych przez uczestników konkursu.* Tym razem osoby biorące udział w konkursie mogą odpowiadać wielokrotnie.

Zadanie wokół chińskiego twierdzenia o resztach

365. Znajdź takie liczby całkowite dodatnie a, b, c, że liczby a^3, b^4, c^5 są długościami boków trójkąta o jednym z kątów miary 120°.

Rozwiązania zadań 353–360

353. $12=\frac{77+7}{7}$ **354.** $24=\left(\frac{77}{7}-7\right)!$ **355.** $28=7+7+7+7=77-7\cdot 7$

Bartek Łubkowski podał trzecie rozwiązanie zadania **355**: $28=\sqrt{777+7}$

356. $96909120=\frac{(4!)!}{(4!-3!)!}$

357. Niech n będzie najmniejszą z szukanej czwórki liczb. Wówczas n musi spełniać następujący układ kongruencji:

$$\begin{cases} n & \equiv & 0 & \pmod 2 \\ n+1 & \equiv & 0 & \pmod 3 \\ n+2 & \equiv & 0 & \pmod 5 \\ n+3 & \equiv & 0 & \pmod 7 \end{cases}$$

Zgodnie z chińskim twierdzeniem o resztach powyższy układ ma dokładnie jedno rozwiązanie nieujemne $n<210$.

Nietrudno stwierdzić, że rozwiązaniem tym jest $n=158$, a wobec tego szukane liczby to 158, 159, 160 i 161.

358. Przyjmijmy $n=2^p\cdot 3^q\cdot 5^r$. Tak określona liczba n spełnia warunki zadania, jeżeli p, q i r spełniają następujące układy kongruencji:

$$\begin{cases} p+1 & \equiv & 0 & \pmod 2 \\ p & \equiv & 0 & \pmod 3 \\ p & \equiv & 0 & \pmod 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} q & \equiv & 0 & \pmod 2 \\ q+1 & \equiv & 0 & \pmod 3 \\ q & \equiv & 0 & \pmod 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} r & \equiv & 0 & \pmod 2 \\ r & \equiv & 0 & \pmod 3 \\ r+1 & \equiv & 0 & \pmod 5 \end{cases}$$

Nietrudno zauważyć, że powyższe układy kongruencji są spełnione przez $p=15$, $q=20$ oraz $r=24$, co prowadzi do $n=2^{15}\cdot 3^{20}\cdot 5^{24}$.

359. Kongruencja $n^2\equiv 1 \pmod{77}$ jest równoważna układowi dwóch kongruencji

$$\begin{cases} n^2 & \equiv & 1 & \pmod 7 \\ n^2 & \equiv & 1 & \pmod{11} \end{cases} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} n^2 & \equiv & \pm_1 1 & \pmod 7 \\ n^2 & \equiv & \pm_2 1 & \pmod{11} \end{cases}$$

Dla każdej pary różnych reszt $r_7, r_{11} \in \{-1, 1\}$, czyli w przypadku, gdy $(r_7, r_{11}) = (-1, 1)$ lub $(r_7, r_{11}) = (1, -1)$, układ kongruencji

$$\begin{cases} n & \equiv & r_7 & \pmod 7 \\ n & \equiv & r_{11} & \pmod{11} \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie całkowite nieujemne $n < 77$, a przy tym żadna z liczb $n-1$, $n+1$ nie jest podzielna przez 77. Nietrudno sprawdzić, że dla pary $(r_7, r_{11}) = (-1, 1)$ rozwiązaniem jest $n = 34$, natomiast dla pary $(r_7, r_{11}) = (1, -1)$ powyższy układ kongruencji jest spełniony przez $n = 43$.

Ogólnie, warunki zadania są spełnione przez liczby n postaci $77k+34$ oraz $77k+43$, gdzie k jest liczbą całkowitą nieujemną.

360. Poszukamy przeskalowanego trójkąta prostokątnego o bokach 3, 4, 5. Niech $2^p \cdot 3^q \cdot 5^r$ będzie skalą podobieństwa. Warunki zadania będą spełnione, jeżeli będziemy mogli przyjąć

$$a^3 = 2^p \cdot 3^{q+1} \cdot 5^r\,, \qquad b^4 = 2^{p+2} \cdot 3^q \cdot 5^r\,, \qquad c^5 = 2^p \cdot 3^q \cdot 5^{r+1}\,.$$

Zatem p, q i r powinny spełniać następujące układy kongruencji:

$$\begin{cases} p & \equiv & 0 & \pmod 3 \\ p+2 & \equiv & 0 & \pmod 4 \\ p & \equiv & 0 & \pmod 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} q+1 & \equiv & 0 & \pmod 3 \\ q & \equiv & 0 & \pmod 4 \\ q & \equiv & 0 & \pmod 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} r & \equiv & 0 & \pmod 3 \\ r & \equiv & 0 & \pmod 4 \\ r+1 & \equiv & 0 & \pmod 5 \end{cases}$$

Nietrudno zauważyć, że powyższe układy kongruencji są spełnione przez $p = 30$, $q = 20$ oraz $r = 24$, co prowadzi do $a = 2^{10} \cdot 3^7 \cdot 5^8$, $b = 2^8 \cdot 3^5 \cdot 5^6$, $c = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^5$.

Chińskie twierdzenie o resztach w π-gułce (prostsza wersja)

Chińskie twierdzenie o resztach (w prostszej wersji) brzmi następująco:
Niech k będzie liczbą całkowitą dodatnią i niech dane będą parami względnie pierwsze liczby całkowite dodatnie $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_k$. Wówczas dla dowolnych liczb całkowitych $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_k$ układ kongruencji

$$\begin{cases} n & \equiv & r_1 & \pmod{m_1} \\ n & \equiv & r_2 & \pmod{m_2} \\ n & \equiv & r_3 & \pmod{m_3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ n & \equiv & r_k & \pmod{m_k} \end{cases}$$

ma rozwiązanie całkowite n. Co więcej, istnieje dokładnie jedno rozwiązanie nieujemne $n < m_1 m_2 m_3 \ldots m_k$, a wszystkie pozostałe rozwiązania całkowite uzyskuje się z niego przez dodanie/odjęcie wielokrotności iloczynu $m_1 m_2 m_3 \ldots m_k$.

Bez użycia kogruencji możemy wyrazić to następująco: Jeżeli zażyczymy sobie, że liczba n ma dawać przy dzieleniu przez m_i resztę r_i dla $i = 1, 2, 3, \ldots, k$, to takie życzenia daje się zrealizować, jeżeli liczby m_i są parami względnie pierwsze.

Wiele prezentowanych w **Trapezie** zadań nie wymaga znajomości powyższego twierdzenia, gdyż rozwiązanie konkretnego układu kongruencji można po prostu znaleźć, a do tego powoływanie się na twierdzenie o istnieniu rozwiązania nie jest konieczne. Te zadania należy potraktować jako ilustrację chińskiego twierdzenia o resztach.