Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **366**, **367** i **368** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

366. Zapisz liczbę 200 używając cyfr 4, 8 i 8.

367. Zapisz liczbę 30 używając cyfr 5, 8 i 8.

368. Zapisz liczbę 24 używając dwukrotnie cyfry 5.

Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 44 (4/2016)

Piątek, 29 stycznia 2016 r.

Zadanie wokół chińskiego twierdzenia o resztach

369. Znajdź takie liczby całkowite dodatnie a, b, c, że liczby a^3, b^4, c^5 są długościami boków trójkąta nierównobocznego o jednym z kątów miary 60°.

Facebookowy konkurs Trapezu – Zadanie Tygodnia

Rozwiąż zadanie **370** znajdujące się na drugiej stronie i podaj w odpowiedzi liczby $f(87)$, $f(103)$ i $f(143)$.

Rozwiązania zadań 361–365

361. $64=\sqrt{7!+\frac{7}{7}}-7$ **362.** $103=\frac{7!+7}{7\cdot 7}$ **363.** $105=(7+7)\cdot 7+7$

364. $100663296=\sqrt{4^{4!}}\cdot\left(5-\sqrt{4}\right)!$

365. Za punkt wyjścia rozwiązania powinniśmy przyjąć trójkąt o bokach całkowitoliczbowej długości i kącie miary 120°. Najprostszy trójkąt tego typu ma boki długości 3, 5 i 7, przy czym miara kąta między dwoma krótszymi bokami jest właśnie równa 120°.

Poszukamy więc przeskalowanego trójkąta o bokach 3, 5, 7. Niech $3^p\cdot 5^q\cdot 7^r$ będzie skalą podobieństwa. Warunki zadania będą spełnione, jeżeli będziemy mogli przyjąć

$$a^3=3^{p+1}\cdot 5^q\cdot 7^r\,,\qquad b^4=3^p\cdot 5^{q+1}\cdot 7^r\,,\qquad c^5=3^p\cdot 5^q\cdot 7^{r+1}\,.$$

Zatem p, q i r powinny spełniać następujące układy kongruencji:

$$\begin{cases} p+1 \equiv 0 \pmod 3\\ p \equiv 0 \pmod 4\\ p \equiv 0 \pmod 5\end{cases}\qquad \begin{cases} q \equiv 0 \pmod 3\\ q+1 \equiv 0 \pmod 4\\ q \equiv 0 \pmod 5\end{cases}\qquad \begin{cases} r \equiv 0 \pmod 3\\ r \equiv 0 \pmod 4\\ r+1 \equiv 0 \pmod 5\end{cases}$$

Nietrudno zauważyć, że powyższe układy kongruencji są spełnione przez $p=20$, $q=15$ oraz $r=24$, co prowadzi do

$$a=3^7\cdot 5^5\cdot 7^8\,,\qquad b=3^5\cdot 5^4\cdot 7^6\,,\qquad c=3^4\cdot 5^3\cdot 7^5\,.$$

Uwagi: Zmieniając kolejność boków w wyjściowym trójkącie otrzymalibyśmy identyczny (z dokładnością do oznaczeń) układ kongruencji jak powyżej.

Niektóre inne przykłady trójkątów o bokach całkowitoliczbowej długości i kącie 120° to trójkąty o bokach $(7,8,13)$, $(5,16,19)$, $(11,24,31)$, $(7,33,37)$, $(13,35,43)$ i $(16,39,49)$. Ponieważ w pierwszym z tych trójkątów jeden bok jest już sześcianem, możemy oprzeć rozwiązanie na doborze liczb p i q, dla których przyjmiemy

$$a^3=2^3\cdot 7^p\cdot 13^q\,,\qquad b^4=7^{p+1}\cdot 13^q\,,\qquad c^5=7^p\cdot 13^{q+1}\,.$$

Uzupełnianka pseudologarytmiczna VII

370. Uzupełnij tabelkę wartości funkcji f takimi liczbami naturalnymi, aby spełnione były następujące warunki:
1° W zakresie tabelki f jest niemalejąca, czyli $f(n) \leqslant f(n+1)$ dla $n = 2, 3, 4, \ldots 142$.
2° Dla dowolnych liczb naturalnych m, n większych od 1 o iloczynie nie większym od 143 zachodzi równość $f(mn) = f(m) + f(n)$.
3° Przy zachowaniu warunków **1°** i **2°** suma liczb wpisanych w tabelkę jest możliwie najmniejsza.

n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$
2	12	**26**		**50**		**74**		**98**		**122**	
3		**27**		**51**		**75**		**99**		**123**	
4	24	**28**		**52**		**76**		**100**		**124**	
5		**29**		**53**		**77**		**101**		**125**	
6		**30**		**54**		**78**		**102**		**126**	
7		**31**		**55**		**79**		**103**		**127**	
8	36	**32**	60	**56**		**80**		**104**		**128**	84
9		**33**		**57**		**81**		**105**		**129**	
10		**34**		**58**		**82**		**106**		**130**	
11		**35**		**59**		**83**		**107**		**131**	
12		**36**		**60**		**84**		**108**		**132**	
13		**37**		**61**		**85**		**109**		**133**	
14		**38**		**62**		**86**		**110**		**134**	
15		**39**		**63**		**87**		**111**		**135**	
16	48	**40**		**64**	72	**88**		**112**		**136**	
17		**41**		**65**		**89**		**113**		**137**	
18		**42**		**66**		**90**		**114**		**138**	
19		**43**		**67**		**91**		**115**		**139**	
20		**44**		**68**		**92**		**116**		**140**	
21		**45**		**69**		**93**		**117**		**141**	
22		**46**		**70**		**94**		**118**		**142**	
23		**47**		**71**		**95**		**119**		**143**	
24		**48**		**72**		**96**		**120**			
25		**49**		**73**		**97**		**121**			