Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 45 (5/2016)
Piątek, 5 lutego 2016 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **371**, **372**, **373** i **374** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

371. Zapisz liczbę 16001 używając cyfr 1, 2, 4, 5 i 7 (każdej tylko raz). Podaj dwa istotnie różne rozwiązania.

372. Zapisz liczbę 71 używając cyfr 2, 5 i 7 (każdej tylko raz).

373. Zapisz liczbę 245 używając cyfr 2, 5 i 7 (każdej tylko raz).

Facebookowy konkurs Trapezu – Zadanie Tygodnia

374. Zapisz jak najmniejszą liczbę całkowitą większą od 16001 używając cyfr 1, 2, 4, 5 i 7 (każdej tylko raz). Przez *jak najmniejszą* rozumiemy *najmniejszą spośród liczb zapisanych przez uczestników konkursu.* Tym razem osoby biorące udział w konkursie mogą odpowiadać wielokrotnie.

Zadania wokół chińskiego twierdzenia o resztach

375. Udowodnij, że istnieje 10 kolejnych liczb całkowitych dodatnich, z których każda ma co najmniej 10 rożnych dzielników pierwszych.

376. Znajdź takie liczby całkowite dodatnie a, b, c, d, że liczby a^2, b^3, c^5 są długościami boków trójkąta o polu d^7.

377. Znajdź liczby całkowite dodatnie a, b, c spełniające równanie

$$a^3+b^4=c^5\,.$$

378. Potęgą nazwiemy każdą liczbę postaci n^k, gdzie n i k są liczbami całkowitymi dodatnimi, przy czym $k>1$. Znajdź rozwiązanie równania

$$a^3\cdot b^4=c^5$$

w liczbach całkowitych dodatnich a, b, c niebędących potęgami.

Rozwiązania zadań 366–370

366. $200=4!\cdot 8+8$ **367.** $30=\dfrac{5!}{\sqrt{8+8}}$ **368.** $24=5!/5$

369. Za punkt wyjścia rozwiązania powinniśmy przyjąć trójkąt o bokach całkowitoliczbowej długości i kącie miary 60°. Jeden z trójkątów tego typu ma boki długości 3, 7 i 8, przy czym miara kąta między najkrótszym i najdłuższym bokiem jest właśnie równa 60°.

A zatem poszukamy przeskalowanego trójkąta o bokach 3, 7, 8. Niech $3^p\cdot 7^q$ będzie skalą podobieństwa. Warunki zadania będą spełnione, jeżeli będziemy mogli przyjąć

$$a^3=8\cdot 3^p\cdot 7^q\,,\qquad b^4=3^{p+1}\cdot 7^q\,,\qquad c^5=3^p\cdot 7^{q+1}\,.$$

Zatem p, i q powinny spełniać następujące układy kongruencji:

$$\begin{cases} p \equiv 0 \pmod 3\\ p+1 \equiv 0 \pmod 4\\ p \equiv 0 \pmod 5\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases} q \equiv 0 \pmod 3\\ q \equiv 0 \pmod 4\\ q+1 \equiv 0 \pmod 5\end{cases}$$

Nietrudno zauważyć, że powyższe układy kongruencji są spełnione przez $p=15$ oraz $q=24$, co prowadzi do

$$a=2\cdot 3^5\cdot 7^8\,,\qquad b=3^4\cdot 7^6\,,\qquad c=3^3\cdot 7^5\,.$$

Uwagi: Inny w miarę prosty trójkąt o całkowitoliczbowych bokach i kącie 60° to trójkąt o bokach 5, 7 i 8. Zbieżność z trójkątem, na którym oparliśmy rozwiązanie zadania jest nieprzypadkowa, jak również nieprzypadkowa jest zbieżność z użytym w rozwiązaniu zadania **365 (Trapez 44)** trójkątem o bokach 3, 5 i 7 mającym kąt 120°. Okazuje się bowiem, że z każdym trójkątem o bokach x, y, z i kącie 120° między pierwszymi dwoma bokami można skojarzyć dwa trójkąty mające kąt 60°, a mianowicie trójkąty o bokach $(x,\, z,\, x+y)$ i $(y,\, z,\, x+y)$, w których kąt naprzeciwko boku długości z ma miarę 60°. Działa to też w drugą stronę, to znaczy od trójkąta o kącie 60° można przejść do trójkąta o kącie 120° oraz drugiego trójkąta o kącie 60°.

370. Z warunku $f(125)\leqslant f(128)=84$ wynika $f(5)\leqslant 28$. Z nierówności $f(24)\leqslant f(25)$ oraz $f(80)\leqslant f(81)$ otrzymujemy odpowiednio $f(3)+36\leqslant 2\cdot f(5)$ oraz $f(5)+48\leqslant 4\cdot f(3)$, skąd

$$f(5)+48\leqslant 4\cdot(2\cdot f(5)-36)=8\cdot f(5)-144\,,$$

co prowadzi do $192\leqslant 7\cdot f(5)$, czyli $f(5)\geqslant 28$.

Zatem $f(5)=28$. Z nierówności $f(27)\geqslant f(25)=56$ wynika $f(3)\geqslant 19$, skąd otrzymujemy $f(48)\geqslant 67$, a to wobec $f(50)=68$ prowadzi do $f(7)=34$. Nierówność $f(63)\leqslant f(64)=72$ daje $f(9)\leqslant 72-34=38$, skąd $f(3)=19$.

Dalsze wypełnienie tabeli nie nastręcza większych trudności.

n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$
2	12	**26**	57	**50**	68	**74**	75	**98**	80	**122**	84
3	19	**27**	57	**51**	68	**75**	75	**99**	80	**123**	84
4	24	**28**	58	**52**	69	**76**	75	**100**	80	**124**	84
5	28	**29**	59	**53**	69	**77**	76	**101**	80	**125**	84
6	31	**30**	59	**54**	69	**78**	76	**102**	80	**126**	84
7	34	**31**	60	**55**	70	**79**	76	**103**	80	**127**	84
8	36	**32**	60	**56**	70	**80**	76	**104**	81	**128**	84
9	38	**33**	61	**57**	70	**81**	76	**105**	81	**129**	84
10	40	**34**	61	**58**	71	**82**	77	**106**	81	**130**	85
11	42	**35**	62	**59**	71	**83**	77	**107**	81	**131**	85
12	43	**36**	62	**60**	71	**84**	77	**108**	81	**132**	85
13	45	**37**	63	**61**	72	**85**	77	**109**	81	**133**	85
14	46	**38**	63	**62**	72	**86**	77	**110**	82	**134**	85
15	47	**39**	64	**63**	72	**87**	78	**111**	82	**135**	85
16	48	**40**	64	**64**	72	**88**	78	**112**	82	**136**	85
17	49	**41**	65	**65**	73	**89**	78	**113**	82	**137**	85
18	50	**42**	65	**66**	73	**90**	78	**114**	82	**138**	86
19	51	**43**	65	**67**	73	**91**	79	**115**	83	**139**	86
20	52	**44**	66	**68**	73	**92**	79	**116**	83	**140**	86
21	53	**45**	66	**69**	74	**93**	79	**117**	83	**141**	86
22	54	**46**	67	**70**	74	**94**	79	**118**	83	**142**	86
23	55	**47**	67	**71**	74	**95**	79	**119**	83	**143**	87
24	55	**48**	67	**72**	74	**96**	79	**120**	83		
25	56	**49**	68	**73**	74	**97**	79	**121**	84		