Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 46 (6/2016)
Piątek, 12 lutego 2016 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **379**, **380**, **381** i **382** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

379. Zapisz liczbę 41 używając cyfr 6, 7 i 8 (każdej tylko raz). Podaj dwa istotnie różne rozwiązania.

380. Zapisz liczbę 50 używając cyfr 6, 7 i 8 (każdej tylko raz). Podaj dwa istotnie różne rozwiązania.

381. Zapisz liczbę 55 używając cyfr 6, 7 i 8 (każdej tylko raz). Podaj dwa istotnie różne rozwiązania.

Facebookowy konkurs Trapezu – Zadanie Tygodnia

382. Zapisz jak najmniejszą liczbę całkowitą większą od 335 używając cyfr 3, 3 i 5. Przez *jak najmniejszą* rozumiemy *najmniejszą spośród liczb zapisanych przez uczestników konkursu.* Tym razem osoby biorące udział w konkursie mogą odpowiadać wielokrotnie.

Zadania wokół chińskiego twierdzenia o resztach

383. Ile istnieje takich liczb całkowitych dodatnich $n<105$, że liczba n^2-1 jest podzielna przez 105?

384. Znajdź takie liczby całkowite dodatnie a, b, c, że liczby a^3, b^5, c^7 (w tej właśnie kolejności) tworzą rosnący postęp arytmetyczny trójwyrazowy.

385. Potęgą nazwiemy każdą liczbę postaci n^k, gdzie n i k są liczbami całkowitymi dodatnimi, przy czym $k>1$. Znajdź rozwiązanie równania

$$a^3+b^4=c^5$$

w liczbach całkowitych dodatnich a, b, c niebędących potęgami.

Rozwiązania zadań 371–378

371. $16001=\sqrt{\dfrac{(2^7)!}{(5!+4)!}+1}=\sqrt{\sqrt{\sqrt{5^{4!}}}\cdot 2^7+1}$ **372.** $71=5!-7^2$ **373.** $245=5\cdot 7^2$

374. $16009=\sqrt{127^4}-5!$ Bartek Łubkowski podał $16002=\dfrac{127!}{\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{5^{4!}}}}\right)!}$

375. Warunki zadania spełniają kolejne liczby od n do $n+9$, gdzie liczba całkowita dodatnia n jest rozwiązaniem następującego układu kongruencji:

$$\begin{cases} n & \equiv & 0 & (\mathrm{mod}\ p_1\cdot p_2\cdot p_3\cdot\ldots\cdot p_{10}) \\ n+1 & \equiv & 0 & (\mathrm{mod}\ p_{11}\cdot p_{12}\cdot p_{13}\cdot\ldots\cdot p_{20}) \\ n+2 & \equiv & 0 & (\mathrm{mod}\ p_{21}\cdot p_{22}\cdot p_{23}\cdot\ldots\cdot p_{30}) \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ n+9 & \equiv & 0 & (\mathrm{mod}\ p_{91}\cdot p_{92}\cdot p_{93}\cdot\ldots\cdot p_{100}) \end{cases}$$

Taka liczba n istnieje na mocy chińskiego twierdzenia o resztach.

Uwagi: W powyższym rozwiązaniu użyliśmy standardowego oznacznia k-tej liczby pierwszej przez p_k.

Uważny Czytelnik bez trudu zauważy, że występującą dwukrotnie w treści zadania liczbę 10 można zastąpić dowolną liczbą naturalną.

376. Poszukamy przeskalowanego trójkąta prostokątnego o bokach 3, 4, 5 i polu 6. Niech $2^p\cdot 3^q\cdot 5^r$ będzie skalą podobieństwa. Warunki zadania będą spełnione, jeżeli będziemy mogli przyjąć

$$a^2=2^p\cdot 3^{q+1}\cdot 5^r\,,\qquad b^3=2^{p+2}\cdot 3^q\cdot 5^r\,,\qquad c^5=2^p\cdot 3^q\cdot 5^{r+1}\,,\qquad d^7=2^{2p+1}\cdot 3^{2q+1}\cdot 5^{2r}\,.$$

Zatem p, q i r powinny spełniać następujące układy kongruencji:

$$\begin{cases} p \equiv 0 \pmod 2\\ p+2 \equiv 0 \pmod 3\\ p\equiv 0 \pmod 5\\ 2p+1\equiv 0 \pmod 7\end{cases}\qquad \begin{cases} q+1 \equiv 0 \pmod 2\\ q \equiv 0 \pmod 3\\ q\equiv 0 \pmod 5\\ 2q+1\equiv 0 \pmod 7\end{cases}\qquad \begin{cases} r \equiv 0 \pmod 2\\ r \equiv 0 \pmod 3\\ r+1\equiv 0 \pmod 5\\ 2r\equiv 0 \pmod 7\end{cases}$$

co można przepisać jako

$$\begin{cases} p \equiv 0 \pmod 2\\ p+2 \equiv 0 \pmod 3\\ p\equiv 0 \pmod 5\\ p\equiv 3 \pmod 7\end{cases}\qquad \begin{cases} q+1 \equiv 0 \pmod 2\\ q \equiv 0 \pmod 3\\ q\equiv 0 \pmod 5\\ q\equiv 3 \pmod 7\end{cases}\qquad \begin{cases} r \equiv 0 \pmod 2\\ r \equiv 0 \pmod 3\\ r+1\equiv 0 \pmod 5\\ r\equiv 0 \pmod 7\end{cases}$$

Nietrudno zauważyć, że powyższe układy kongruencji są spełnione przez $p=10$, $q=45$ oraz $r=84$, co prowadzi do

$$a=2^5\cdot 3^{23}\cdot 5^{42}\,,\qquad b=2^4\cdot 3^{15}\cdot 5^{28}\,,\qquad c=2^2\cdot 3^9\cdot 5^{17}\,,\qquad d=2^3\cdot 3^{13}\cdot 5^{24}\,.$$

377. Wychodząc od równości $2^n+2^n=2^{n+1}$ postaramy się dobrać takie n, aby można przyjąć

$$a^3=2^n\,,\qquad b^4=2^n\qquad \text{oraz}\qquad c^5=2^{n+1}\,,$$

co oznacza, że liczba n powinna być podzielna przez 3 i 4, a liczba $n+1$ przez 5. Nietrudno zauważyć, że takie warunki spełnia $n=24$. To prowadzi do następującego rozwiązania danego w zadaniu równania:

$$a=2^8=256\,,\qquad b=2^6=64\,,\qquad c=2^5=32\,.$$

378. Wychodząc od równości

$$6^3\cdot(2^p\cdot 3^q)=2^{p+3}\cdot 3^{q+3}$$

otrzymamy rozwiązanie danego w zadaniu równania, jeżeli liczby całkowite dodatnie p i q będą spełniać następujące układy kongruencji:

$$\begin{cases} p\equiv 0 \pmod 4\\ p+3\equiv 0 \pmod 5\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases} q\equiv 0 \pmod 4\\ q+3\equiv 0 \pmod 5\end{cases}\tag{1}$$

Wówczas przyjmiemy

$$a=6\,,\qquad b=2^{p/4}\cdot 3^{q/4}\qquad \text{oraz}\qquad c=2^{(p+3)/5}\cdot 3^{(q+3)/5}\,.$$

Aby zdefiniowane wyżej liczby b i c nie były potęgami, musi być spełniony warunek

$$\mathrm{NWD}(p/4,\,q/4)=\mathrm{NWD}((p+3)/5,\,(q+3)/5)=1\,.$$

Zauważmy, że liczbami p i q spełniającymi układy kongruencji (1) są liczby postaci $12+20k$. Jeśli jednak przyjmiemy $p=q=12$, to otrzymane liczby $b=c=2^3\cdot 3^3$ będą potęgami (a konkretnie sześcianami liczby 6). Przyjmiemy więc $p=12$ i $q=32$, co prowadzi do liczb $b=2^3\cdot 3^8$ i $c=2^3\cdot 3^7$, które nie są potęgami.