

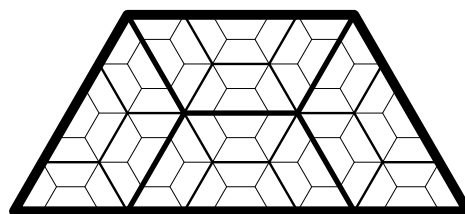
## Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **386**, **387**, **388** i **389** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

**386.** Zapisz liczbę 61 używając cyfr 6, 7 i 8 (każdej tylko raz).

**387.** Zapisz liczbę 62 używając cyfr 6, 7 i 8 (każdej tylko raz).

**388.** Zapisz liczbę 97 używając cyfr 6, 7 i 8 (każdej tylko raz).



Autorski Tygodnik Matematyczny  
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

# TRAPEZ

Nr 47 (7/2016)

Piątek, 19 lutego 2016 r.

## Facebookowy konkurs Trapezu – Zadanie Tygodnia

**389.** Zapisz jak najmniejszą liczbę całkowitą większą od 70000 używając cyfr 4, 5, 6 i 9 (każdej tylko raz). Przez *jak najmniejszą* rozumiemy *najmniejszą spośród liczb zapisanych przez uczestników konkursu*. Tym razem osoby biorące udział w konkursie mogą odpowiadać wielokrotnie.

## Zadanie wokół chińskiego twierdzenia o resztach

**390.** Znajdź liczby naturalne  $a, b, c, x, y, z$  większe od 1 spełniające równanie

$$a^{x^x} + b^{y^y} = c^{z^z}.$$

## Rozwiązania zadań 379–385

**379.**  $41 = 6 \cdot 8 - 7 = \sqrt{\sqrt{7^8} - 6!}$

**380.**  $50 = 7 \cdot 8 - 6 = 6 \cdot 7 + 8$

**381.**  $55 = \sqrt{\sqrt{7^8} + 6} = 6 \cdot 8 + 7$

**382.**  $336 = (3!)^3 + 5!$

**383.** Kongruencja  $n^2 \equiv 1 \pmod{105}$  jest równoważna układowi trzech kongruencji

$$\begin{cases} n^2 \equiv 1 \pmod{3} \\ n^2 \equiv 1 \pmod{5} \\ n^2 \equiv 1 \pmod{7} \end{cases} \quad (1)$$

czyli

$$\begin{cases} n \equiv \pm_1 1 \pmod{3} \\ n \equiv \pm_2 1 \pmod{5} \\ n \equiv \pm_3 1 \pmod{7} \end{cases}$$

gdzie znaki " $\pm_1$ ", " $\pm_2$ " i " $\pm_3$ " są wybrane niezależnie.

Dla każdej trójki reszt  $r_3, r_5, r_7 \in \{-1, 1\}$  układ kongruencji

$$\begin{cases} n \equiv r_3 \pmod{3} \\ n \equiv r_5 \pmod{5} \\ n \equiv r_7 \pmod{7} \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie całkowite nieujemne  $n < 105$ . Ponieważ takich trójek jest osiem, oznacza to, że układ kongruencji (1) ma osiem rozwiązań całkowitych nieujemnych  $n < 105$ , a ponieważ  $n = 0$  nie spełnia tego układu, liczba rozwiązań dodatnich również jest równa 8.

*Uwaga:* Osiem liczb spełniających warunki zadania to 1, 29, 34, 41, 64, 71, 76, 104.



**384.** *Sposób I:* Przeskalujemy postęp arytmetyczny 1, 2, 3 mnożąc jego wyrazy przez  $2^p \cdot 3^q$ . W ten sposób otrzymamy szukany postęp arytmetyczny, jeżeli będziemy mogli przyjąć

$$a^3 = 2^p \cdot 3^q, \quad b^5 = 2^{p+1} \cdot 3^q, \quad c^7 = 2^p \cdot 3^{q+1}.$$

Zatem  $p$  i  $q$  powinny spełniać następujące układy kongruencji:

$$\begin{cases} p \equiv 0 \pmod{3} \\ p+1 \equiv 0 \pmod{5} \\ p \equiv 0 \pmod{7} \end{cases} \quad \begin{cases} q \equiv 0 \pmod{3} \\ q \equiv 0 \pmod{5} \\ q+1 \equiv 0 \pmod{7} \end{cases}$$

Nietrudno zauważyć, że powyższe układy kongruencji są spełnione przez  $p = 84$  oraz  $q = 90$ , co prowadzi do

$$a = 2^{28} \cdot 3^{30}, \quad b = 2^{17} \cdot 3^{18}, \quad c = 2^{12} \cdot 3^{13}.$$

*Sposób II:* Przeskalujemy postęp arytmetyczny 1, 32, 63 mnożąc jego wyrazy przez  $63^p$ . W ten sposób otrzymamy szukany postęp arytmetyczny, jeżeli będziemy mogli przyjąć

$$a^3 = 63^p, \quad b^5 = 2^5 \cdot 63^p, \quad c^7 = 63^{p+1}.$$

Dobierzemy więc  $p$  tak, aby spełniony był następujący układ kongruencji:

$$\begin{cases} p \equiv 0 \pmod{3} \\ p \equiv 0 \pmod{5} \\ p+1 \equiv 0 \pmod{7} \end{cases}$$

Nietrudno zauważyć, że powyższy układ kongruencji jest spełniony przez  $p = 90$ , co prowadzi do  $a = 63^{30}$ ,  $b = 2 \cdot 63^{18}$ ,  $c = 63^{13}$ .

Dzieląc powyższe rozwiązanie przez odpowiednie potęgi trójki otrzymujemy

$$a = 3^{25} \cdot 7^{30}, \quad b = 2 \cdot 3^{15} \cdot 7^{18}, \quad c = 3^{11} \cdot 7^{13}.$$

**385.** Za punkt wyjścia do skonstruowania rozwiązania równania

$$a^3 + b^4 = c^5 \tag{2}$$

przyjmijmy równość  $1 + 2 = 3$ . Mnożąc tę równość przez  $2^p \cdot 3^q$  otrzymujemy

$$2^p \cdot 3^q + 2^{p+1} \cdot 3^q = 2^p \cdot 3^{q+1}. \tag{3}$$

Aby uzyskać rozwiązanie równania (2) postaramy się dobrać takie  $p$  i  $q$ , aby dopasować odpowiednie elementy równości (3) do równania (2). W tym celu poszukamy liczb  $p$  i  $q$  spełniających następujące układy kongruencji:

$$\begin{cases} p \equiv 0 \pmod{3} \\ p+1 \equiv 0 \pmod{4} \\ p \equiv 0 \pmod{5} \end{cases} \quad \begin{cases} q \equiv 0 \pmod{3} \\ q \equiv 0 \pmod{4} \\ q+1 \equiv 0 \pmod{5} \end{cases}$$

Nietrudno zauważyć, że powyższe układy kongruencji są spełnione przez  $p = 15$  oraz  $q = 24$ , co prowadzi do następującego rozwiązania równania (2):

$$a = 2^5 \cdot 3^8, \quad b = 2^4 \cdot 3^6, \quad c = 2^3 \cdot 3^4.$$

Niestety, to rozwiązanie nie spełnia warunków zadania, gdyż liczba  $b$  jest potęgą (kwadratem) liczby całkowitej. Jednak do wyżej podanych liczb  $p$  i  $q$  możemy dodać dowolne wielokrotności liczby 60, a co za tym idzie do wykładników w wyrażeniach definiujących liczby  $a$ ,  $b$  i  $c$  możemy dodać odpowiednie wielokrotności liczb 20, 15 i 12. Dopasowanie właściwych wielokrotności metodą prób i błędów prowadzi np. do rozwiązania

$$a = 2^{25} \cdot 3^8, \quad b = 2^{19} \cdot 3^6, \quad c = 2^{15} \cdot 3^4.$$

