Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **386**, **387**, **388** i **389** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

386. Zapisz liczbę 61 używając cyfr 6, 7 i 8 (każdej tylko raz).

387. Zapisz liczbę 62 używając cyfr 6, 7 i 8 (każdej tylko raz).

388. Zapisz liczbę 97 używając cyfr 6, 7 i 8 (każdej tylko raz).

Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 47 (7/2016)
Piątek, 19 lutego 2016 r.

Facebookowy konkurs Trapezu – Zadanie Tygodnia

389. Zapisz jak najmniejszą liczbę całkowitą większą od 70000 używając cyfr 4, 5, 6 i 9 (każdej tylko raz). Przez *jak najmniejszą* rozumiemy *najmniejszą spośród liczb zapisanych przez uczestników konkursu.* Tym razem osoby biorące udział w konkursie mogą odpowiadać wielokrotnie.

Zadanie wokół chińskiego twierdzenia o resztach

390. Znajdź liczby naturalne a, b, c, x, y, z większe od 1 spełniające równanie
$$a^{x^x}+b^{y^y}=c^{z^z}\,.$$

Rozwiązania zadań 379–385

379. $41=6\cdot 8-7=\sqrt{\sqrt{7^8}-6!}$ **380.** $50=7\cdot 8-6=6\cdot 7+8$

381. $55=\sqrt{\sqrt{7^8}}+6=6\cdot 8+7$ **382.** $336=(3!)^3+5!$

383. Kongruencja $n^2\equiv 1 \pmod{105}$ jest równoważna układowi trzech kongruencji
$$\begin{cases} n^2 \equiv 1 \pmod 3\\ n^2 \equiv 1 \pmod 5\\ n^2 \equiv 1 \pmod 7\end{cases}\qquad (1)$$
czyli
$$\begin{cases} n \equiv \pm_1 1 \pmod 3\\ n \equiv \pm_2 1 \pmod 5\\ n \equiv \pm_3 1 \pmod 7\end{cases}$$
gdzie znaki "$\pm_1$", "$\pm_2$" i "$\pm_3$" są wybrane niezależnie.

Dla każdej trójki reszt r_3, r_5, $r_7\in\{-1, 1\}$ układ kongruencji
$$\begin{cases} n \equiv r_3 \pmod 3\\ n \equiv r_5 \pmod 5\\ n \equiv r_7 \pmod 7\end{cases}$$
ma dokładnie jedno rozwiązanie całkowite nieujemne $n<105$. Ponieważ takich trójek jest osiem, oznacza to, że układ kongruencji (1) ma osiem rozwiązań całkowitych nieujemnych $n<105$, a ponieważ $n=0$ nie spełnia tego układu, liczba rozwiązań dodatnich również jest równa 8.

Uwaga: Osiem liczb spełniających warunki zadania to 1, 29, 34, 41, 64, 71, 76, 104.

384. *Sposób I:* Przeskalujmy postęp arytmetyczny 1, 2, 3 mnożąc jego wyrazy przez $2^p \cdot 3^q$. W ten sposób otrzymamy szukany postęp arytmetyczny, jeżeli będziemy mogli przyjąć

$$a^3 = 2^p \cdot 3^q\,, \qquad b^5 = 2^{p+1} \cdot 3^q\,, \qquad c^7 = 2^p \cdot 3^{q+1}\,.$$

Zatem p i q powinny spełniać następujące układy kongruencji:

$$\begin{cases} p & \equiv \ 0 \pmod 3 \\ p+1 & \equiv \ 0 \pmod 5 \\ p & \equiv \ 0 \pmod 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} q & \equiv \ 0 \pmod 3 \\ q & \equiv \ 0 \pmod 5 \\ q+1 & \equiv \ 0 \pmod 7 \end{cases}$$

Nietrudno zauważyć, że powyższe układy kongruencji są spełnione przez $p = 84$ oraz $q = 90$, co prowadzi do

$$a = 2^{28} \cdot 3^{30}\,, \qquad b = 2^{17} \cdot 3^{18}\,, \qquad c = 2^{12} \cdot 3^{13}\,.$$

Sposób II: Przeskalujmy postęp arytmetyczny 1, 32, 63 mnożąc jego wyrazy przez 63^p. W ten sposób otrzymamy szukany postęp arytmetyczny, jeżeli będziemy mogli przyjąć

$$a^3 = 63^p\,, \qquad b^5 = 2^5 \cdot 63^p\,, \qquad c^7 = 63^{p+1}\,.$$

Dobierzemy więc p tak, aby spełniony był następujący układ kongruencji:

$$\begin{cases} p & \equiv \ 0 \pmod 3 \\ p & \equiv \ 0 \pmod 5 \\ p+1 & \equiv \ 0 \pmod 7 \end{cases}$$

Nietrudno zauważyć, że powyższy układ kongruencji jest spełniony przez $p = 90$, co prowadzi do $a = 63^{30}$, $b = 2 \cdot 63^{18}$, $c = 63^{13}$.

Dzieląc powyższe rozwiązanie przez odpowiednie potęgi trójki otrzymujemy

$$a = 3^{25} \cdot 7^{30}\,, \qquad b = 2 \cdot 3^{15} \cdot 7^{18}\,, \qquad c = 3^{11} \cdot 7^{13}\,.$$

385. Za punkt wyjścia do skonstruowania rozwiązania równania

$$a^3 + b^4 = c^5 \tag{2}$$

przyjmijmy równość $1 + 2 = 3$. Mnożąc tę równość przez $2^p \cdot 3^q$ otrzymujemy

$$2^p \cdot 3^q + 2^{p+1} \cdot 3^q = 2^p \cdot 3^{q+1}\,. \tag{3}$$

Aby uzyskać rozwiązanie równania (2) postaramy się dobrać takie p i q, aby dopasować odpowiednie elementy równości (3) do równania (2). W tym celu poszukamy liczb p i q spełniających następujące układy kongruencji:

$$\begin{cases} p & \equiv \ 0 \pmod 3 \\ p+1 & \equiv \ 0 \pmod 4 \\ p & \equiv \ 0 \pmod 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} q & \equiv \ 0 \pmod 3 \\ q & \equiv \ 0 \pmod 4 \\ q+1 & \equiv \ 0 \pmod 5 \end{cases}$$

Nietrudno zauważyć, że powyższe układy kongruencji są spełnione przez $p = 15$ oraz $q = 24$, co prowadzi do następującego rozwiązania równania (2):

$$a = 2^5 \cdot 3^8\,, \qquad b = 2^4 \cdot 3^6\,, \qquad c = 2^3 \cdot 3^4\,.$$

Niestety, to rozwiązanie nie spełnia warunków zadania, gdyż liczba b jest potęgą (kwadratem) liczby całkowitej. Jednak do wyżej podanych liczb p i q możemy dodać dowolne wielokrotności liczby 60, a co za tym idzie do wykładników w wyrażeniach definiujących liczby a, b i c możemy dodać odpowiednie wielokrotności liczb 20, 15 i 12. Dopasowanie właściwych wielokrotności metodą prób i błędów prowadzi np. do rozwiązania

$$a = 2^{25} \cdot 3^8\,, \qquad b = 2^{19} \cdot 3^6\,, \qquad c = 2^{15} \cdot 3^4\,.$$