Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO
TRAPEZ
Nr 49 (9/2016)
Piątek, 4 marca 2016 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **396**, **397**, **398** i **399** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

396. Zapisz liczbę 210 używając cyfr 1, 3 i 7 (każdej tylko raz).

397. Zapisz liczbę 150 używając cyfr 1, 4 i 9 (każdej tylko raz).

398. Zapisz liczbę 37 używając cyfr 1, 3 i 4 (każdej tylko raz). Podaj dwa istotnie różne rozwiązania.

Facebookowy konkurs Trapezu – Zadanie Tygodnia

399. Zapisz jak najmniejszą liczbę całkowitą większą od 12000 używając cyfr 1, 2, 3 i 6 (każdej tylko raz). Przez *jak najmniejszą* rozumiemy *najmniejszą spośród liczb zapisanych przez uczestników konkursu.* Tym razem osoby biorące udział w konkursie mogą odpowiadać wielokrotnie.

Zadania wokół chińskiego twierdzenia o resztach

400. Udowodnij istnienie takich liczb całkowitych dodatnich a, b, c, d, e, f, g, h, że liczby a^2, b^3, c^5, d^7, e^{11}, e^{13}, e^{17}, e^{19} (w tej właśnie kolejności) tworzą postęp geometryczny ośmiowyrazowy o ilorazie 2.

401. Ile istnieje takich liczb całkowitych dodatnich $n<2310$, że liczba n^2-n jest podzielna przez 2310?

402. Udowodnij, że istnieje 10 kolejnych liczb całkowitych dodatnich, z których każda jest podzielna przez 10-tą potęgę pewnej liczby pierwszej.

Rozwiązania zadań 391–395

391. $98=7\cdot(6+8)$ **392.** $105=\dfrac{7!}{6\cdot 8}$ **393.** $140=\dfrac{7!}{\sqrt{\sqrt{6^8}}}$

394. Załóżmy, że $x=2$, $y=3$, $z=5$. Wychodząc od równości $2^n+2^n=2^{n+1}$ postaramy się dobrać takie n, aby można przyjąć

$$a^4=2^n\,,\qquad b^{27}=2^n\qquad \text{oraz}\qquad c^{3125}=2^{n+1}\,,$$

co oznacza, że liczba n powinna być podzielna przez 4 i 27, a liczba $n+1$ przez 3125. Taka liczba n istnieje na mocy chińskiego twierdzenia o resztach, skąd otrzymujemy

$$a=2^{n/4}\,,\qquad b=2^{n/27}\,,\qquad c=2^{(n+1)/3125}\,.$$

Uwagi: Można wyliczyć, że podane wyżej warunki spełnia $n=240624$. To prowadzi do następującego rozwiązania danego w zadaniu równania: $a=2^{60156}$, $b=2^{8912}$, $c=2^{77}$.

W rozważanym w zadaniu równaniu

$$a^{x^x}+b^{y^y}=c^{z^z} \tag{1}$$

wykładniki tylko wyglądają trochę przerażająco, ale chińskie twierdzenie o resztach pokazuje swoją siłę: nieważe, jak skomplikowane wyrażenia są w wykładnikach, ważne, aby udało się je uczynić liczbami parami względnie pierwszymi. Czytelnik bez trudu zauważy, że rozwiązanie zadania nie ulegnie istotnej zmianie, jeżeli równanie (1) zastąpimy równaniem

$$a^{x^{x^{x^{x^x}}}}+b^{y^{y^{y^{y^y}}}}=c^{z^{z^{z^{z^z}}}}.$$

395. Z warunku $f(125)\leqslant f(128)=105$ wynika $f(5)\leqslant 35$. Z nierówności $f(24)\leqslant f(25)$ oraz $f(80)\leqslant f(81)$ otrzymujemy odpowiednio

$$f(3)+45\leqslant 2\cdot f(5) \quad \text{oraz} \quad f(5)+60\leqslant 4\cdot f(3)\,,$$

skąd

$$f(5)+60\leqslant 4\cdot(2\cdot f(5)-45)=8\cdot f(5)-180\,,$$

co prowadzi do $240\leqslant 7\cdot f(5)$, czyli $f(5)\geqslant 35$.

Zatem $f(5)=35$. Z nierówności $f(27)\geqslant f(25)=70$ wynika $f(3)\geqslant 24$, skąd otrzymujemy $f(48)\geqslant 84$, a to wobec $f(50)=85$ prowadzi do $f(49)=84$, czyli $f(7)=42$. Z kolei wykorzystanie nierówności $f(48)\leqslant f(49)=84$ daje $f(3)=24$.

Dalsze wypełnienie tabelki zgodnie z podanymi warunkami przebiega bez większych problemów.

n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$
2	15	**28**	72	**54**	87	**80**	95	**106**	101	**132**	106
3	24	**29**	73	**55**	87	**81**	96	**107**	101	**133**	106
4	30	**30**	74	**56**	87	**82**	96	**108**	102	**134**	106
5	35	**31**	75	**57**	88	**83**	96	**109**	102	**135**	107
6	39	**32**	75	**58**	88	**84**	96	**110**	102	**136**	107
7	42	**33**	76	**59**	89	**85**	97	**111**	102	**137**	107
8	45	**34**	77	**60**	89	**86**	97	**112**	102	**138**	107
9	48	**35**	77	**61**	89	**87**	97	**113**	102	**139**	107
10	50	**36**	78	**62**	90	**88**	97	**114**	103	**140**	107
11	52	**37**	78	**63**	90	**89**	97	**115**	103	**141**	108
12	54	**38**	79	**64**	90	**90**	98	**116**	103	**142**	108
13	56	**39**	80	**65**	91	**91**	98	**117**	104	**143**	108
14	57	**40**	80	**66**	91	**92**	98	**118**	104	**144**	108
15	59	**41**	81	**67**	91	**93**	99	**119**	104	**145**	108
16	60	**42**	81	**68**	92	**94**	99	**120**	104	**146**	108
17	62	**43**	82	**69**	92	**95**	99	**121**	104	**147**	108
18	63	**44**	82	**70**	92	**96**	99	**122**	104	**148**	108
19	64	**45**	83	**71**	93	**97**	99	**123**	105	**149**	108
20	65	**46**	83	**72**	93	**98**	99	**124**	105	**150**	109
21	66	**47**	84	**73**	93	**99**	100	**125**	105	**151**	109
22	67	**48**	84	**74**	93	**100**	100	**126**	105	**152**	109
23	68	**49**	84	**75**	94	**101**	100	**127**	105	**153**	110
24	69	**50**	85	**76**	94	**102**	101	**128**	105		
25	70	**51**	86	**77**	94	**103**	101	**129**	106		
26	71	**52**	86	**78**	95	**104**	101	**130**	106		
27	72	**53**	86	**79**	95	**105**	101	**131**	106		