Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 50 (10/2016)
Piątek, 11 marca 2016 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **403–407** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

403. Zapisz liczbę 45 używając cyfr 1, 2 i 4 (każdej tylko raz).

404. Zapisz liczbę 46 używając cyfr 1, 2 i 4 (każdej tylko raz).

405. Zapisz liczbę 49 używając cyfr 1, 2 i 4 (każdej tylko raz).

406. Zapisz liczbę 65 używając cyfr 1, 2 i 4 (każdej tylko raz).

Facebookowy konkurs Trapezu – Zadanie Tygodnia

407. Zapisz jak najmniejszą liczbę całkowitą większą od 200 używając cyfr 2, 2, 2 i 8. Przez *jak najmniejszą* rozumiemy *najmniejszą spośród liczb zapisanych przez uczestników konkursu.* Tym razem osoby biorące udział w konkursie mogą odpowiadać wielokrotnie.

Zadania wokół chińskiego twierdzenia o resztach

408. Udowodnij istnienie takich liczb całkowitych dodatnich a, b, c, d, e, f, g, h, że liczby a^2, b^3, c^5, d^7, e^{11}, e^{13}, e^{17}, e^{19} (w tej właśnie kolejności) tworzą rosnący postęp arytmetyczny ośmiowyrazowy.

409. Ile istnieje takich liczb całkowitych dodatnich $n<1001$, że liczba n^3-n jest podzielna przez 1001?

410. Ile istnieje takich liczb całkowitych dodatnich $n<91$, że liczba n^3-1 jest podzielna przez 91?

Rozwiązania zadań 396–402

396. $210=\dfrac{7!}{(1+3)!}$

397. $150=\left(\sqrt{9}\right)!\cdot(4!+1)$

398. $37=4!+13=\sqrt{(3!)^4}+1$

399. $12012=\dfrac{13!}{(6!)^2}$

400. Przeskalujmy postęp geometryczny 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 mnożąc jego wyrazy przez liczbę 2^p. W ten sposób otrzymamy szukany postęp geometryczny, jeżeli będziemy mogli przyjąć

$$a^2=2^p\,,\qquad b^3=2^{p+1}\,,\qquad c^5=2^{p+2}\,,\qquad d^7=2^{p+3}\,,$$
$$e^{11}=2^{p+4}\,,\qquad f^{13}=2^{p+5}\,,\qquad g^{17}=2^{p+6}\,,\qquad h^{19}=2^{p+7}\,.$$

Zatem liczba p powinna spełniać następujący układ kongruencji:

$$\begin{cases} p & \equiv & 0 & \pmod{2} \\ p+1 & \equiv & 0 & \pmod{3} \\ p+2 & \equiv & 0 & \pmod{5} \\ p+3 & \equiv & 0 & \pmod{7} \\ p+4 & \equiv & 0 & \pmod{11} \\ p+5 & \equiv & 0 & \pmod{13} \\ p+6 & \equiv & 0 & \pmod{17} \\ p+7 & \equiv & 0 & \pmod{19} \end{cases}$$

Powyższy układ kongruencji ma rozwiązanie na mocy chińskiego twierdzenia o resztach.

401. Kongruencja $n^2-n\equiv 0\pmod{2310}$ jest równoważna układowi pięciu kongruencji

$$\begin{cases} n\cdot(n-1) & \equiv & 0 & \pmod{2} \\ n\cdot(n-1) & \equiv & 0 & \pmod{3} \\ n\cdot(n-1) & \equiv & 0 & \pmod{5} \\ n\cdot(n-1) & \equiv & 0 & \pmod{7} \\ n\cdot(n-1) & \equiv & 0 & \pmod{11} \end{cases} \tag{1}$$

Dla każdej piątki reszt r_2, r_3, r_5, r_7, $r_{11}\in\{0,\,1\}$ układ kongruencji

$$\begin{cases} n & \equiv & r_2 & \pmod{2} \\ n & \equiv & r_3 & \pmod{3} \\ n & \equiv & r_5 & \pmod{5} \\ n & \equiv & r_7 & \pmod{7} \\ n & \equiv & r_{11} & \pmod{11} \end{cases} \tag{2}$$

ma jedyne rozwiązanie nieujemne $n<2310$, a przy tym rozwiązaniami układu (1) są te i tylko te liczby, które spełniają układ (2) dla pewnej piątki reszt $r_2, r_3, r_5, r_7, r_{11}\in\{0,1\}$.

Ponieważ takich piątek reszt jest 32, liczb całkowitych nieujemnych $n<2310$ spełniających układ (1) jest właśnie 32. Skoro jedną z tych liczb jest liczba 0, a pytanie w treści zadania dotyczy liczb dodatnich, warunki zadania są spełnione przez 31 liczb.

Odpowiedź: Istnieje 31 liczb całkowitych dodatnich $n<2310$, dla których liczba n^2-n jest podzielna przez 2310.

Uwaga: Czytelnik zapewne widzi już, że sposób rozwiązania zadania i końcowa odpowiedź nie zmienią się, jeżeli zamiast liczby 2310 weźmiemy dowolną liczbę będącą iloczynem pięciu różnych liczb pierwszych.

Z kolei zastąpienie liczby 2310 przez iloczyn k różnych liczb pierwszych wymusi jedynie drobną modyfikację redakcji rozwiązania (zamiast piątek reszt trzeba będzie rozważyć układy złożone z k reszt) i da odpowiedź na postawione w zadaniu pytanie 2^k-1.

Idąc dalej, można zauważyć, że kongruencja

$$n\cdot(n-1)\equiv 0\pmod{m}$$

jest równoważna warunkowi

$$n\equiv r\pmod{m}\quad \text{dla pewnego}\quad r\in\{0,\,1\}$$

także w przypadku, gdy m jest potęgą liczby pierwszej. Stąd wynika, że zastąpienie liczby 2310 przez liczbę mającą k dzielników pierwszych również prowadzi do odpowiedzi 2^k-1.

402. Warunki zadania spełniają kolejne liczby od n do $n+9$, gdzie liczba całkowita dodatnia n jest rozwiązaniem następującego układu kongruencji:

$$\begin{cases} n & \equiv & 0 & \pmod{2^{10}} \\ n+1 & \equiv & 0 & \pmod{3^{10}} \\ n+2 & \equiv & 0 & \pmod{5^{10}} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ n+9 & \equiv & 0 & \pmod{29^{10}} \end{cases}$$

Taka liczba n istnieje na mocy chińskiego twierdzenia o resztach.

Uwaga: Uważny Czytelnik od razu dostrzeże, że występującą dwukrotnie w treści zadania liczbę 10 można zamienić na dowolnie dużą liczbę naturalną.