Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 51 (11/2016)
Piątek, 18 marca 2016 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **411**, **412**, **413** i **414** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

411. Zapisz liczbę $10!=3628800$ używając cyfr 6 i 7 (każdej tylko raz).

412. Zapisz liczbę 93 używając cyfr 1, 2, 3 i 4 (każdej tylko raz). Podaj dwa istotnie różne rozwiązania.

413. Zapisz liczbę 99 używając cyfr 1, 2, 3 i 4 (każdej tylko raz). Podaj trzy istotnie różne rozwiązania.

Facebookowy konkurs Trapezu – Zadanie Tygodnia

414. Zapisz jak najmniejszą liczbę całkowitą większą od 12000 używając cyfr 1, 2, 4, 6 i 7 (każdej tylko raz). Przez *jak najmniejszą* rozumiemy *najmniejszą spośród liczb zapisanych przez uczestników konkursu.* Tym razem osoby biorące udział w konkursie mogą odpowiadać wielokrotnie.

Zadanie wokół chińskiego twierdzenia o resztach

415. Udowodnij, że istnieje 105 kolejnych liczb całkowitych dodatnich, z których każda ma dzielnik pierwszy mniejszy od 60.

Rozwiązania zadań 403–410

403. $45=21+4!$ **404.** $46=2\cdot(4!-1)$ **405.** $49=4!\cdot 2+1$

406. $65=1+\sqrt{\sqrt{2^{4!}}}$ **407.** $202=\sqrt{8!+22^2}$

408. Przeskalujmy postęp arytmetyczny 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 mnożąc jego wyrazy przez liczbę $2^p\cdot 3^q\cdot 5^r\cdot 7^s$. W ten sposób otrzymamy szukany postęp arytmetyczny, jeżeli będziemy mogli przyjąć

$$a^2=2^p\cdot 3^q\cdot 5^r\cdot 7^s\,,\quad b^3=2^{p+1}\cdot 3^q\cdot 5^r\cdot 7^s\,,\quad c^5=2^p\cdot 3^{q+1}\cdot 5^r\cdot 7^s\,,\quad d^7=2^{p+2}\cdot 3^q\cdot 5^r\cdot 7^s\,,$$
$$e^{11}=2^p\cdot 3^q\cdot 5^{r+1}\cdot 7^s,\quad f^{13}=2^{p+1}\cdot 3^{q+1}\cdot 5^r\cdot 7^s,\quad g^{17}=2^p\cdot 3^q\cdot 5^r\cdot 7^{s+1},\quad h^{19}=2^{p+3}\cdot 3^q\cdot 5^r\cdot 7^s.$$

Zatem p, q, r i s powinny spełniać następujące układy kongruencji:

$$\begin{cases} p & \equiv 0 \pmod{2}\\ p+1 & \equiv 0 \pmod{3}\\ p & \equiv 0 \pmod{5}\\ p+2 & \equiv 0 \pmod{7}\\ p & \equiv 0 \pmod{11}\\ p+1 & \equiv 0 \pmod{13}\\ p & \equiv 0 \pmod{17}\\ p+3 & \equiv 0 \pmod{19} \end{cases} \qquad \begin{cases} q & \equiv 0 \pmod{2}\\ q & \equiv 0 \pmod{3}\\ q+1 & \equiv 0 \pmod{5}\\ q & \equiv 0 \pmod{7}\\ q & \equiv 0 \pmod{11}\\ q+1 & \equiv 0 \pmod{13}\\ q & \equiv 0 \pmod{17}\\ q & \equiv 0 \pmod{19} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r & \equiv 0 \pmod 2 \\ r & \equiv 0 \pmod 3 \\ r & \equiv 0 \pmod 5 \\ r & \equiv 0 \pmod 7 \\ r+1 & \equiv 0 \pmod{11} \\ r & \equiv 0 \pmod{13} \\ r & \equiv 0 \pmod{17} \\ r & \equiv 0 \pmod{19} \end{cases} \qquad \begin{cases} s & \equiv 0 \pmod 2 \\ s & \equiv 0 \pmod 3 \\ s & \equiv 0 \pmod 5 \\ s & \equiv 0 \pmod 7 \\ s & \equiv 0 \pmod{11} \\ s & \equiv 0 \pmod{13} \\ s+1 & \equiv 0 \pmod{17} \\ s & \equiv 0 \pmod{19} \end{cases}$$

Powyższe układy kongruencji mają rozwiązanie na mocy chińskiego twierdzenia o resztach.

409. Kongruencja $n^3-n\equiv 0 \pmod{1001}$ jest równoważna układowi trzech kongruencji

$$\begin{cases} (n-1)\cdot n\cdot(n+1) \equiv 0 \pmod 7 \\ (n-1)\cdot n\cdot(n+1) \equiv 0 \pmod{11} \\ (n-1)\cdot n\cdot(n+1) \equiv 0 \pmod{13} \end{cases} \tag{1}$$

Dla każdej trójki reszt $r_7, r_{11}, r_{13} \in \{-1, 0, 1\}$ układ kongruencji

$$\begin{cases} n \equiv r_7 \pmod 7 \\ n \equiv r_{11} \pmod{11} \\ n \equiv r_{13} \pmod{13} \end{cases} \tag{2}$$

ma jedyne rozwiązanie nieujemne $n < 1001$, a przy tym rozwiązaniami układu (1) są te i tylko te liczby, które spełniają układ (2) dla pewnej trójki reszt $r_7, r_{11}, r_{13} \in \{-1, 0, 1\}$.

Ponieważ takich trójek reszt jest 27, liczb całkowitych nieujemnych $n < 1001$ spełniających układ (1) jest właśnie 27. Skoro jedną z tych liczb jest liczba 0, a pytanie w treści zadania dotyczy liczb dodatnich, warunki zadania są spełnione przez 26 liczb.

Odpowiedź: Istnieje 26 liczb całkowitych dodatnich $n < 1001$, dla których liczba n^3-n jest podzielna przez 1001.

Uwaga: Czytelnik zapewne widzi już, że sposób rozwiązania zadania i końcowa odpowiedź nie zmienią się, jeżeli zamiast liczby 1001 weźmiemy dowolną liczbę będącą iloczynem trzech różnych liczb pierwszych nieparzystych.

410. Kongruencja $n^3 \equiv 1 \pmod{91}$ jest równoważna układowi dwóch kongruencji

$$\begin{cases} n^3 \equiv 1 \pmod 7 \\ n^3 \equiv 1 \pmod{13} \end{cases} \tag{3}$$

Dla każdej pary reszt $r_7 \in \{1, 2, 4\}$ oraz $r_{13} \in \{1, 3, 9\}$ układ kongruencji

$$\begin{cases} n \equiv r_7 \pmod 7 \\ n \equiv r_{13} \pmod{13} \end{cases} \tag{4}$$

ma jedyne rozwiązanie nieujemne $n < 91$, a przy tym rozwiązaniami układu (3) są te i tylko te liczby, które spełniają układ (4) dla pary reszt $r_7 \in \{1, 2, 4\}$ oraz $r_{13} \in \{1, 3, 9\}$.

Ponieważ takich par reszt jest 9, liczb całkowitych nieujemnych $n < 91$ spełniających układ (3) jest właśnie 9. Skoro liczba 0 nie spełnia tego układu kongruencji, a pytanie w treści zadania dotyczy liczb dodatnich, warunki zadania są spełnione przez 9 liczb.

Odpowiedź: Istnieje 9 liczb całkowitych dodatnich $n < 91$, dla których liczba n^3-1 jest podzielna przez 91.