Łamigłówki i zadania na ferie

W łamigłówkach **416**, **417** i **418** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

416. Zapisz liczbę 245 używając cyfr 2, 5 i 5.

417. Zapisz liczbę 604 używając cyfr 2, 4, 4 i 9.

418. Zapisz liczbę 256 używając cyfr 2, 2 i 5. Podaj dwa istotnie różne rozwiązania.

Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO
TRAPEZ
Nr 52 (12/2016)
Środa, 23 marca 2016 r.

Zadanie wokół chińskiego twierdzenia o resztach

419. Ile istnieje takich liczb całkowitych dodatnich $n<1729$, że liczba n^7-n jest podzielna przez 1729?

Facebookowy konkurs Trapezu – Zadanie Tygodnia

Rozwiąż zadanie **420** i podaj w odpowiedzi liczby $f(47)$, $f(71)$ i $f(159)$.

Rozwiązania zadań 411–415

411. $10!=6!\cdot 7!$

412. $93=4\cdot 23+1=3^4+12$

413. $99=123-4!=\left(3+\sqrt{4}\right)!-21=(3!+4)^2-1$

414. $12003=7^4\cdot(6-1)-2$

415. Niech liczba całkowita dodatnia n będzie rozwiązaniem następującego układu kongruencji:

$$\begin{cases} n & \equiv & 0 \pmod{47\#} \\ n+1 & \equiv & 0 \pmod{53} \\ n-1 & \equiv & 0 \pmod{59} \end{cases}$$

Taka liczba n istnieje na mocy chińskiego twierdzenia o resztach.

Pozostaje zauważyć, że warunki zadania są spełnione przez kolejne liczby od $n-52$ do $n+52$. Istotnie, skoro liczba n jest podzielna przez wszystkie liczby pierwsze mniejsze od 53, to dla $i=2,3,4,\ldots,52$ liczby $n\pm i$ są podzielne przez dzielniki pierwsze liczby i, a w konsekwencji mają dzielnik pierwszy mniejszy od 53. Do tego momentu moglibyśmy wcale nie korzystać z chińskiego twierdzenia o resztach, a po prostu przyjąć $n=47\#$ lub wręcz $n=52!$. To jednak uniemożliwiłoby nam wymuszenie podzielności liczb $n\pm 1$ przez małe dzielniki pierwsze. Dzięki chińskiemu twierdzeniu o resztach wykorzystujemy dwie nieużyte dotąd liczby pierwsze, a mianowicie 53 i 59, do „zatroszczenia się” o liczby $n\pm 1$.

Uwaga: Powyżej użyliśmy oznaczenia $47\#=2\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot 47$. Ogólnie, przez $k\#$ oznaczamy iloczyn wszystkich liczb pierwszych nie większych od k.

Uzupełnianka pseudologarytmiczna IX

420. Uzupełnij tabelkę wartości funkcji f takimi liczbami naturalnymi, aby spełnione były następujące warunki:

1° W zakresie tabelki f jest niemalejąca, czyli $f(n)\leqslant f(n+1)$ dla $n=2,\ 3,\ 4,\ \ldots 187$.

2° Dla dowolnych liczb naturalnych m, n większych od 1 o iloczynie nie większym od 188 zachodzi równość $f(mn)=f(m)+f(n)$.

3° Przy zachowaniu warunków **1**° i **2**° suma liczb wpisanych w tabelkę jest możliwie najmniejsza.

n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$
2	19	**34**		**66**		**98**		**130**		**162**	
3		**35**		**67**		**99**		**131**		**163**	
4	38	**36**		**68**		**100**		**132**		**164**	
5		**37**		**69**		**101**		**133**		**165**	
6		**38**		**70**		**102**		**134**		**166**	
7		**39**		**71**		**103**		**135**		**167**	
8	57	**40**		**72**		**104**		**136**		**168**	
9		**41**		**73**		**105**		**137**		**169**	
10		**42**		**74**		**106**		**138**		**170**	
11		**43**		**75**		**107**		**139**		**171**	
12		**44**		**76**		**108**		**140**		**172**	
13		**45**		**77**		**109**		**141**		**173**	
14		**46**		**78**		**110**		**142**		**174**	
15		**47**		**79**		**111**		**143**		**175**	
16	76	**48**		**80**		**112**		**144**		**176**	
17		**49**		**81**		**113**		**145**		**177**	
18		**50**		**82**		**114**		**146**		**178**	
19		**51**		**83**		**115**		**147**		**179**	
20		**52**		**84**		**116**		**148**		**180**	
21		**53**		**85**		**117**		**149**		**181**	
22		**54**		**86**		**118**		**150**		**182**	
23		**55**		**87**		**119**		**151**		**183**	
24		**56**		**88**		**120**		**152**		**184**	
25		**57**		**89**		**121**		**153**		**185**	
26		**58**		**90**		**122**		**154**		**186**	
27		**59**		**91**		**123**		**155**		**187**	
28		**60**		**92**		**124**		**156**		**188**	
29		**61**		**93**		**125**		**157**			
30		**62**		**94**		**126**		**158**			
31		**63**		**95**		**127**		**159**			
32	95	**64**	114	**96**		**128**	133	**160**			
33		**65**		**97**		**129**		**161**			