Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 53 (13/2016)

Piątek, 1 kwietnia 2016 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **421**, **422** i **423** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

421. Zapisz liczbę 60 używając trzykrotnie cyfry 3. Podaj dwa istotnie różne rozwiązania.

422. Zapisz liczbę 243 używając trzykrotnie cyfry 3. Podaj dwa istotnie różne rozwiązania.

423. Zapisz liczbę 245 używając cyfr 3, 3 i 5.

Facebookowy konkurs Trapezu – Zadanie Tygodnia

424. Długość krótszej przyprostokątnej trójkąta prostokątnego zwiększono o 200%, wskutek czego długość krótszej przyprostokątnej zwiększyła się o 100%. O ile procent zwiększyła się długość przeciwprostokątnej? Zaokrąglij odpowiedź do trzech cyfr po przecinku.

Zadanie wokół chińskiego twierdzenia o resztach

425. Udowodnij istnienie takich liczb naturalnych a, b, c, d, e, f, g, h, i, A, B, C, D, E, F, G, H, I, większych od 1, że kwadraty

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline a & b & c \\ \hline d & e & f \\ \hline g & h & i \\ \hline \end{array} \quad \text{oraz} \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline A^a & B^b & C^c \\ \hline D^d & E^e & F^f \\ \hline G^g & H^h & I^i \\ \hline \end{array} \quad \text{są magiczne.}$$

W kwadracie magicznym suma liczb w każdym wierszu, w każdej kolumnie i na każdej z dwóch przekątnych jest taka sama, a ponadto liczby wpisane w pola kwadratu są różne.

Rozwiązania zadań 416–420

416. $245=5!\cdot 2+5$

417. $604=\sqrt{9!+44^2}$

418. $256=\sqrt{\sqrt{2^{2^5}}}=\sqrt{2\cdot\sqrt{\sqrt{\sqrt{2^{5!}}}}}=\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{\sqrt{\sqrt{2^{2^{5!}}}}}}}}}$ (117 pierwiastków)

419. Kongruencja $n^7-n\equiv 0 \pmod{1729}$ jest równoważna układowi trzech kongruencji

$$\begin{cases} n^7 \equiv n \pmod{7} \\ n^7 \equiv n \pmod{13} \\ n^7 \equiv n \pmod{19} \end{cases} \tag{1}$$

Dla każdej trójki reszt (r_7, r_{13}, r_{19}) spełniających warunki

$$r_7\in\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\},\quad r_{13}\in\{0, 1, 3, 4, 9, 10, 12\}\quad \text{oraz}\quad r_{19}\in\{0, 1, 7, 8, 11, 12, 18\} \tag{2}$$

układ kongruencji

$$\begin{cases} n \equiv r_7 \pmod{7} \\ n \equiv r_{13} \pmod{13} \\ n \equiv r_{19} \pmod{19} \end{cases} \tag{3}$$

ma jedyne rozwiązanie nieujemne $n<1729$, a przy tym rozwiązaniami układu (1) są te i tylko te liczby, które spełniają układ (3) dla pewnej trójki reszt (r_7, r_{13}, r_{19}) spełniającej warunki (2).

Ponieważ takich trójek reszt jest 343, liczb całkowitych nieujemnych $n<1729$ spełniających układ (1) jest właśnie 343. Skoro jedną z tych liczb jest liczba 0, a pytanie w treści zadania dotyczy liczb dodatnich, warunki zadania są spełnione przez **342 liczby**.

420. Z warunku $f(125) \leqslant f(128) = 133$ wynika $f(5) \leqslant 44$. Z nierówności $f(24) \leqslant f(25)$ oraz $f(80) \leqslant f(81)$ otrzymujemy odpowiednio

$$f(3) + 57 \leqslant 2 \cdot f(5) \quad \text{oraz} \quad f(5) + 76 \leqslant 4 \cdot f(3)\,,$$

skąd

$$f(5) + 76 \leqslant 4 \cdot (2 \cdot f(5) - 57) = 8 \cdot f(5) - 228\,,$$

co prowadzi do $304 \leqslant 7 \cdot f(5)$, czyli $f(5) \geqslant 44$.

Zatem $f(5) = 44$. Z nierówności $f(27) \geqslant f(25) = 88$ wynika $f(3) \geqslant 30$, skąd otrzymujemy $f(48) \geqslant 106$, a to wobec $f(50) = 107$ prowadzi do $f(7) = 53$. Ponadto korzystając z nierówności $f(48) \leqslant f(49) = 106$ uzyskujemy $f(3) = 30$.

Gdy zauważymy, że liczby $f(121)$ i $f(169)$ są parzyste, bez trudu wypełnimy prawie całą tabelkę. W końcówce nierówność $f(188) \geqslant f(187) = 144$ pozwala nam ustalić, że $f(47) = 106$.

n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$
2	19	**34**	97	**66**	115	**98**	125	**130**	133	**162**	139
3	30	**35**	97	**67**	115	**99**	126	**131**	133	**163**	139
4	38	**36**	98	**68**	116	**100**	126	**132**	134	**164**	140
5	44	**37**	99	**69**	116	**101**	126	**133**	134	**165**	140
6	49	**38**	100	**70**	116	**102**	127	**134**	134	**166**	140
7	53	**39**	100	**71**	117	**103**	127	**135**	134	**167**	140
8	57	**40**	101	**72**	117	**104**	127	**136**	135	**168**	140
9	60	**41**	102	**73**	117	**105**	127	**137**	135	**169**	140
10	63	**42**	102	**74**	118	**106**	127	**138**	135	**170**	141
11	66	**43**	103	**75**	118	**107**	127	**139**	135	**171**	141
12	68	**44**	104	**76**	119	**108**	128	**140**	135	**172**	141
13	70	**45**	104	**77**	119	**109**	128	**141**	136	**173**	141
14	72	**46**	105	**78**	119	**110**	129	**142**	136	**174**	141
15	74	**47**	106	**79**	119	**111**	129	**143**	136	**175**	141
16	76	**48**	106	**80**	120	**112**	129	**144**	136	**176**	142
17	78	**49**	106	**81**	120	**113**	129	**145**	136	**177**	142
18	79	**50**	107	**82**	121	**114**	130	**146**	136	**178**	142
19	81	**51**	108	**83**	121	**115**	130	**147**	136	**179**	142
20	82	**52**	108	**84**	121	**116**	130	**148**	137	**180**	142
21	83	**53**	108	**85**	122	**117**	130	**149**	137	**181**	142
22	85	**54**	109	**86**	122	**118**	131	**150**	137	**182**	142
23	86	**55**	110	**87**	122	**119**	131	**151**	137	**183**	143
24	87	**56**	110	**88**	123	**120**	131	**152**	138	**184**	143
25	88	**57**	111	**89**	123	**121**	132	**153**	138	**185**	143
26	89	**58**	111	**90**	123	**122**	132	**154**	138	**186**	143
27	90	**59**	112	**91**	123	**123**	132	**155**	138	**187**	144
28	91	**60**	112	**92**	124	**124**	132	**156**	138	**188**	144
29	92	**61**	113	**93**	124	**125**	132	**157**	138		
30	93	**62**	113	**94**	125	**126**	132	**158**	138		
31	94	**63**	113	**95**	125	**127**	132	**159**	138		
32	95	**64**	114	**96**	125	**128**	133	**160**	139		
33	96	**65**	114	**97**	125	**129**	133	**161**	139		

Óadne kfiatki I

$\frac{19}{95}=\frac{1\cancel{9}}{\cancel{9}5}=\frac{1}{5}$ $\frac{26}{65}=\frac{2\cancel{6}}{\cancel{6}5}=\frac{2}{5}$ $\frac{16}{64}=\frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4}=\frac{1}{4}$ $\frac{49}{98}=\frac{4\cancel{9}}{\cancel{9}8}=\frac{4}{8}$

$\frac{484}{847}=\frac{4\cancel{84}}{\cancel{84}7}=\frac{4}{7}$ $\frac{654}{545}=\frac{6\cancel{54}}{\cancel{54}5}=\frac{6}{5}$ $\frac{742}{424}=\frac{7\cancel{42}}{\cancel{42}4}=\frac{7}{4}$

$\frac{217}{775}=\frac{21\cancel{7}}{\cancel{7}75}=\frac{21}{75}$ $\frac{249}{996}=\frac{24\cancel{9}}{\cancel{9}96}=\frac{24}{96}$ $\frac{4324}{3243}=\frac{4\cancel{324}}{\cancel{324}3}=\frac{4}{3}$

$\frac{1484}{8480}=\frac{14\cancel{84}}{\cancel{84}80}=\frac{14}{80}$ $\frac{3681}{8180}=\frac{36\cancel{81}}{\cancel{81}80}=\frac{36}{80}$ $\frac{1751}{5150}=\frac{17\cancel{51}}{\cancel{51}50}=\frac{17}{50}$

Óadne kfiatki II

$$\sqrt{\frac{1}{9}}+\frac{1}{3} = \sqrt{\frac{1}{9}+}\frac{1}{3} = \sqrt{\frac{1}{9}+}\frac{1}{3} = \sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{3}}$$

$$\sqrt{\frac{1}{16}}+\frac{1}{2} = \sqrt{\frac{1}{16}+}\frac{1}{2} = \sqrt{\frac{1}{16}+}\frac{1}{2} = \sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{\frac{9}{25}}-\frac{1}{5} = \sqrt{\frac{9}{25}-}\frac{1}{5} = \sqrt{\frac{9}{25}-}\frac{1}{5} = \sqrt{\frac{9}{25}-\frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{9}{25}-\frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{9}{25}-\frac{1}{5}}$$

Óadne kfiatki III

$\frac{3}{3}-\frac{4}{2}=\frac{3-4}{3-2}$ $\frac{10}{5}-\frac{18}{3}=\frac{10-18}{5-3}$ $\frac{15}{5}-\frac{16}{4}=\frac{15-16}{5-4}$

Óadne kfiatki IV

$\frac{9+3!}{76+4!}=\frac{9+3\cancel{!}}{76+4\cancel{!}}=\frac{9+3}{76+4}$ $\frac{12+4!}{87+5!}=\frac{12+4\cancel{!}}{87+5\cancel{!}}=\frac{12+4}{87+5}$

Óadne kfiatki V

Policz całki oznaczone:

$\int\limits_0^1 x\,dx$ $\int\limits_e^{e^2} \ln x\,dx$ $\int\limits_1^2 e^{x^2}\,dx$ $\int\limits_1^e \left(1+\frac{1}{x}\right)^x dx$ $\int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{7}} \sqrt[17]{x^{73}+2016x^{37}+257}\,dx$

Odpowiedź: Jest pięć całek.

Óadne kfiatki VI

$$\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{5}-\frac{1}{6} = \frac{1}{5}-\frac{1}{6} = \frac{1}{5}-\frac{1}{6} = \frac{1}{5}-\frac{1}{6} = \frac{1}{5}-\frac{1}{6} = \frac{1}{5}-\frac{1}{6}$$

Óadne kfiatki VII

$\log_3 9\cdot\log_3 9=\log_3(9\cdot 9)$ $\log_4 8\cdot\log_4 64=\log_4(8\cdot 64)$ $\log_{25}5\cdot\log_{25}\frac{1}{25}=\log_{25}(5\cdot\frac{1}{25})$

Óadne kfiatki VIII

$\log_3 2+\log_3 2=\log_3(2+2)$ $\log_5 4+\log_5\frac{4}{3}=\log_5\left(4+\frac{4}{3}\right)$ $\log_7\frac{5}{2}+\log_7\frac{5}{3}=\log_7\left(\frac{5}{2}+\frac{5}{3}\right)$

Óadne kfiatki IX

$$\sqrt{1+1+16-9} = \sqrt{1}+\sqrt{1}+\sqrt{16}-\sqrt{9}$$
$$\sqrt{1+4+36-16} = \sqrt{1}+\sqrt{4}+\sqrt{36}-\sqrt{16}$$
$$\sqrt{1+16+81-49} = \sqrt{1}+\sqrt{16}+\sqrt{81}-\sqrt{49}$$

Óadne kfiatki X

Oblicz 2/3 liczby 24.

Rozwiązanie: Ponieważ

$$\frac{2}{3}\cdot 24 = 2\cdot\frac{24}{3}\,,$$

najpierw podzielimy liczbę 24 przez 3, a następnie pomnożymy liczbę 2 przez otrzymany wynik dzielenia.

Dzielenie pisemne prowadzi do $24:3=17$, a mnożenie pisemne do $2\cdot 17=16$:

$$\begin{array}{l} 2\mathbf{4}:\mathbf{3}=\mathbf{1} \end{array} \qquad \begin{array}{l} 24:\mathbf{3}=\mathbf{1} \\ \ \mathbf{3} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \mathbf{24}:3=1 \\ -\mathbf{3} \\ \hline \ \ \mathbf{1} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \mathbf{2}4:3=1 \\ -3 \\ \hline \mathbf{21} \end{array} \qquad \begin{array}{l} 24:\mathbf{3}=1\mathbf{7} \\ -3 \\ \hline \mathbf{21} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 24:\mathbf{3}=1\mathbf{7} \\ -3 \\ \hline 21 \\ \mathbf{21} \end{array} \qquad \begin{array}{l} 24:3=17 \\ -3 \\ \hline \mathbf{21} \\ -\mathbf{21} \\ \hline \ \ \mathbf{==} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \mathbf{2} \\ \times\ 1\mathbf{7} \\ \hline \mathbf{14} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \mathbf{2} \\ \times\ \mathbf{1}7 \\ \hline 14 \\ \mathbf{2} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2 \\ \times\ 17 \\ \hline \mathbf{14} \\ +\quad \mathbf{2} \\ \hline \mathbf{16} \end{array}$$

Odpowiedź: 2/3 liczby 24 to 16.

Óadne kfiatki XI

Oblicz 3/2 liczby 16.

Rozwiązanie: Ponieważ

$$\frac{3}{2}\cdot 16 = 3\cdot\frac{16}{2}\,,$$

najpierw podzielimy liczbę 16 przez 2, a następnie pomnożymy liczbę 3 przez otrzymany wynik dzielenia.

Dzielenie pisemne prowadzi do $16:2=35$, a mnożenie pisemne do $3\cdot 35=24$:

$$\begin{array}{l} 1\mathbf{6}:\mathbf{2}=\mathbf{3} \end{array} \qquad \begin{array}{l} 16:\mathbf{2}=\mathbf{3} \\ \ \mathbf{6} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \mathbf{16}:2=3 \\ -\mathbf{6} \\ \hline \ \ \mathbf{0} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \mathbf{1}6:2=3 \\ -6 \\ \hline \mathbf{1}0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 16:\mathbf{2}=3\mathbf{5} \\ -6 \\ \hline \mathbf{10} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 16:\mathbf{2}=3\mathbf{5} \\ -6 \\ \hline 10 \\ \mathbf{10} \end{array} \qquad \begin{array}{l} 16:2=35 \\ -6 \\ \hline \mathbf{10} \\ -\mathbf{10} \\ \hline \ \ \mathbf{==} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \mathbf{3} \\ \times\ 3\mathbf{5} \\ \hline \mathbf{15} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \mathbf{3} \\ \times\ \mathbf{3}5 \\ \hline 15 \\ \mathbf{9} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3 \\ \times\ 35 \\ \hline \mathbf{15} \\ +\quad \mathbf{9} \\ \hline \mathbf{24} \end{array}$$

Odpowiedź: 3/2 liczby 16 to 24.

Óadne kfiatki XII

$$z=\frac{3+4i}{5} \qquad (\overline{z})^7=\overline{z}^7=\overline{z}^7=\overline{z}^{\,7}=\overline{z}^{-7}=\overline{z}^{-7}=\overline{z}^{-7}=\frac{1}{z^7}$$

Óadne kfiatki XIII

$$9=3^2=3^{4^{1/2}}=\left(3^4\right)^{1/2}=81^{1/2}=9 \qquad 625=5^4=5^{2^2}=\left(5^2\right)^2=25^2=625$$

Óadne kfiatki XIV

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{1+125+729-343} &= \sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{125}+\sqrt[3]{729}-\sqrt[3]{343} \\ \sqrt[3]{8+64+1000-343} &= \sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{64}+\sqrt[3]{1000}-\sqrt[3]{343} \end{aligned}$$

Óadne kfiatki XV

$$\frac{2\sqrt{2}-3}{\sqrt{2}-1}+\frac{11-6\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}-3 \;\;+\;\; 11-6\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1 \;\;+\;\; 3-\sqrt{2}} = \frac{8-4\sqrt{2}}{2} = 4-2\sqrt{2}$$

Óadne kfiatki XVI

Oblicz 14/19 liczby 190.

Rozwiązanie: Ponieważ

$$\frac{14}{19}\cdot 190 = 14\cdot\frac{190}{19},$$

najpierw podzielimy liczbę 190 przez 19, a następnie pomnożymy liczbę 14 przez otrzymany wynik dzielenia.

Dzielenie pisemne prowadzi do $190:19=46$, a mnożenie pisemne do $14\cdot 46=140$:

$$\begin{array}{r}1\mathbf{90}:\mathbf{19}=\mathbf{4}\\ \\ \\ \end{array}\qquad
\begin{array}{r}190:\mathbf{19}=\mathbf{4}\\ \mathbf{76}\qquad\quad\\ \\ \end{array}\qquad
\begin{array}{r}\mathbf{190}:19=4\\ \underline{\mathbf{-76}}\qquad\quad\\ \mathbf{14}\qquad\quad \end{array}\qquad
\begin{array}{r}\mathbf{1}90:19=4\\ \underline{-76}\qquad\quad\\ \mathbf{1}14\qquad\quad \end{array}\qquad
\begin{array}{r}190:\mathbf{19}=4\mathbf{6}\\ \underline{-76}\qquad\quad\\ \mathbf{114}\qquad\quad \end{array}$$

$$\begin{array}{r}190:\mathbf{19}=4\mathbf{6}\\ \underline{-76}\qquad\quad\\ 114\qquad\quad\\ \mathbf{114}\qquad\quad\\ \\ \end{array}\qquad
\begin{array}{r}190:19=46\\ \underline{-76}\qquad\quad\\ \mathbf{114}\qquad\quad\\ \underline{\mathbf{-114}}\qquad\quad\\ \mathbf{===}\qquad\quad \end{array}\qquad
\begin{array}{r}\mathbf{14}\\ \underline{\times\ 4\mathbf{6}}\\ \mathbf{84}\\ \\ \\ \end{array}\qquad
\begin{array}{r}\mathbf{14}\\ \underline{\times\ \mathbf{4}6}\\ 84\\ \mathbf{56}\\ \\ \end{array}\qquad
\begin{array}{r}14\\ \underline{\times\ 46}\\ \mathbf{84}\\ \underline{\mathbf{+\ 56}}\\ \mathbf{140} \end{array}$$

Odpowiedź: 14/19 liczby 190 to 140.

Óadne kfiatki XVII

Oblicz 19/14 liczby 140.

Rozwiązanie: Ponieważ

$$\frac{19}{14}\cdot 140 = 19\cdot\frac{140}{14},$$

najpierw podzielimy liczbę 140 przez 14, a następnie pomnożymy liczbę 19 przez otrzymany wynik dzielenia.

Dzielenie pisemne prowadzi do $140:14=28$, a mnożenie pisemne do $19\cdot 28=190$:

$$\begin{array}{r}1\mathbf{40}:\mathbf{14}=\mathbf{2}\\ \\ \\ \end{array}\qquad
\begin{array}{r}140:\mathbf{14}=\mathbf{2}\\ \mathbf{28}\qquad\quad\\ \\ \end{array}\qquad
\begin{array}{r}\mathbf{140}:14=2\\ \underline{\mathbf{-28}}\qquad\quad\\ \mathbf{12}\qquad\quad \end{array}\qquad
\begin{array}{r}\mathbf{1}40:14=2\\ \underline{-28}\qquad\quad\\ \mathbf{1}12\qquad\quad \end{array}\qquad
\begin{array}{r}140:\mathbf{14}=2\mathbf{8}\\ \underline{-28}\qquad\quad\\ \mathbf{112}\qquad\quad \end{array}$$

$$\begin{array}{r}140:\mathbf{14}=2\mathbf{8}\\ \underline{-28}\qquad\quad\\ 112\qquad\quad\\ \mathbf{112}\qquad\quad\\ \\ \end{array}\qquad
\begin{array}{r}140:14=28\\ \underline{-28}\qquad\quad\\ \mathbf{112}\qquad\quad\\ \underline{\mathbf{-112}}\qquad\quad\\ \mathbf{===}\qquad\quad \end{array}\qquad
\begin{array}{r}\mathbf{19}\\ \underline{\times\ 2\mathbf{8}}\\ \mathbf{152}\\ \\ \\ \end{array}\qquad
\begin{array}{r}\mathbf{19}\\ \underline{\times\ \mathbf{2}8}\\ 152\\ \mathbf{38}\\ \\ \end{array}\qquad
\begin{array}{r}19\\ \underline{\times\ 28}\\ \mathbf{152}\\ \underline{\mathbf{+\ 38}}\\ \mathbf{190} \end{array}$$

Odpowiedź: 19/14 liczby 140 to 190.

Óadne kfiatki XVIII

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}-\frac{1}{3} = \frac{1}{4+15+24-3} = \frac{1}{40}$$

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{18}+\frac{1}{24}-\frac{1}{5} = \frac{1}{8+18+24-5} = \frac{1}{45}$$

$$\frac{1}{7}+\frac{1}{24}+\frac{1}{30}-\frac{1}{5} = \frac{1}{7+24+30-5} = \frac{1}{56}$$

Óadne kfiatki XIX

$$\sqrt{\sqrt{1+625+65536+104976-2401-38416}} = \qquad (=\mathbf{19})$$

$$=\sqrt{\sqrt{1}+\sqrt{625}+\sqrt{65536}+\sqrt{104976}-\sqrt{2401}-\sqrt{38416}} = \qquad (=\mathbf{19})$$

$$=\sqrt{\sqrt{1}}+\sqrt{\sqrt{625}}+\sqrt{\sqrt{65536}}+\sqrt{\sqrt{104976}}-\sqrt{\sqrt{2401}}-\sqrt{\sqrt{38416}} \qquad (=\mathbf{19})$$

Óadne kfiatki XX

$$\sqrt[3]{\frac{27}{343}}+\frac{2}{7} = \sqrt[3]{\frac{27}{343}}+\frac{2}{7} = \sqrt[3]{\frac{27}{343}}+\frac{2}{7} = \sqrt[3]{\frac{27}{343}}+\frac{2}{7} = \sqrt[3]{\frac{27}{343}}+\frac{2}{7} = \sqrt[3]{\frac{27}{343}+\frac{2}{7}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{343}{2197}}+\frac{1}{13} = \sqrt[3]{\frac{343}{2197}}+\frac{1}{13} = \sqrt[3]{\frac{343}{2197}}+\frac{1}{13} = \sqrt[3]{\frac{343}{2197}}+\frac{1}{13} = \sqrt[3]{\frac{343}{2197}}+\frac{1}{13} = \sqrt[3]{\frac{343}{2197}+\frac{1}{13}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{4096}{6859}}-\frac{11}{19} = \sqrt[3]{\frac{4096}{6859}}-\frac{11}{19} = \sqrt[3]{\frac{4096}{6859}}-\frac{11}{19} = \sqrt[3]{\frac{4096}{6859}}-\frac{11}{19} = \sqrt[3]{\frac{4096}{6859}}-\frac{11}{19} = \sqrt[3]{\frac{4096}{6859}-\frac{11}{19}}$$

Óadne kfiatki XXI

$$\sqrt[4]{\frac{62304353849776801}{1423276677734560000}}+\frac{5497}{17270}=$$
$$=\sqrt[4]{\frac{62304353849776801}{1423276677734560000}}+\frac{5497}{17270}=$$
$$=\sqrt[4]{\frac{62304353849776801}{1423276677734560000}}+\frac{5497}{17270}=$$
$$=\sqrt[4]{\frac{62304353849776801}{1423276677734560000}}+\frac{5497}{17270}=$$
$$=\sqrt[4]{\frac{62304353849776801}{1423276677734560000}}+\frac{5497}{17270}=$$
$$=\sqrt[4]{\frac{62304353849776801}{1423276677734560000}+\frac{5497}{17270}}$$

$$\sqrt[4]{\frac{515329941429792801}{1423276677734560000}}-\frac{5497}{17270}=$$
$$=\sqrt[4]{\frac{515329941429792801}{1423276677734560000}}-\frac{5497}{17270}=$$
$$=\sqrt[4]{\frac{515329941429792801}{1423276677734560000}}-\frac{5497}{17270}=$$
$$=\sqrt[4]{\frac{515329941429792801}{1423276677734560000}}-\frac{5497}{17270}=$$
$$=\sqrt[4]{\frac{515329941429792801}{1423276677734560000}}-\frac{5497}{17270}=$$
$$=\sqrt[4]{\frac{515329941429792801}{1423276677734560000}-\frac{5497}{17270}}$$

Óadne kfiatki XXII

$$\log_2 1+1=\log_2(1+1) \qquad \log_{\sqrt{2}}2+2=\log_{\sqrt{2}}(2+2) \qquad \log_{\sqrt{3}}1+2=\log_{\sqrt{3}}(1+2)$$

$$\log_{3/2}2+1=\log_{3/2}(2+1) \qquad \log_2\frac{2}{3}+2=\log_2\left(\frac{2}{3}+2\right) \qquad \log_3\frac{1}{4}+2=\log_3\left(\frac{1}{4}+2\right)$$

Óadne kfiatki XXIII

$$2^5\cdot 9^2 = 2^5 9^2 = 2^5 9^2 = 2^5 9^2 = 2^5 9^2 = 2592 = 2592$$

$$3^4\cdot 425 = 3^4 425 = 3^4 425 = 3^4 425 = 3^4 425 = 34425 = 34425$$

Óadne kfiatki XXIV

$$4! = \left(\frac{1000}{250}\right)! = \text{Tysiąc dwieście pięćdziesiątych!} = \frac{1200}{50} = 24$$

Óadne kfiatki XXV

$$\sqrt[4]{\sqrt[10]{1024}} = \sqrt[4]{\sqrt[\cancel{10}]{\cancel{10}24}} = \sqrt[4]{\sqrt{24}} = \sqrt[\cancel{4}]{\sqrt{2\cancel{4}}} = \sqrt{\sqrt{2}}$$

Óadne kfiatki XXVI

$$x=1+3+9+27+81+243+729+\ldots=1+3\cdot1+3\cdot3+3\cdot9+3\cdot27+3\cdot81+3\cdot243+\ldots=$$
$$=1+3\cdot(1+3+9+27+81+243+729+\ldots)=1+3x\,,$$
$$x=1+3x, \qquad 0=1+2x, \qquad x=-1/2\,.$$

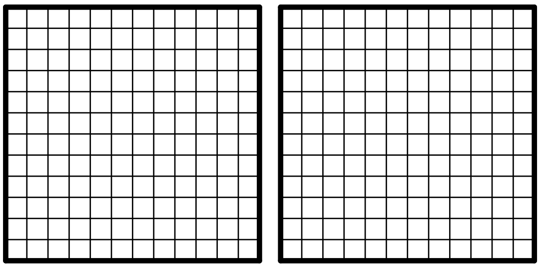
Wniosek 1: Suma liczb dodatnich może być ujemna.
Wniosek 2: Suma liczb całkowitych nie musi być całkowita.

Óadne kfiatki XXVII

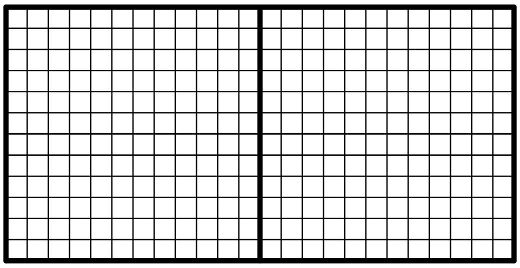
$$\frac{6^2}{24}=\frac{6^{\cancel{2}}}{\cancel{2}4}=\frac{6}{4} \qquad\qquad \frac{5^2}{25}=\frac{5^{\cancel{2}}}{\cancel{2}5}=\frac{5}{5}$$

Óadne kfiatki XXVIII

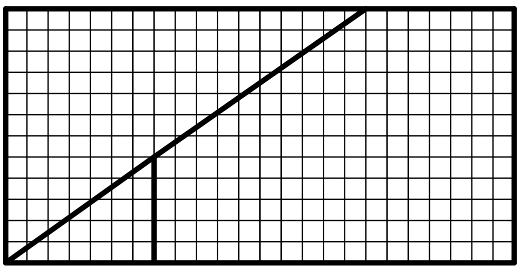
Podwojenie kwadratu po raz pierwszy, czyli graficzny dowód wymierności liczby $\sqrt{2}$.



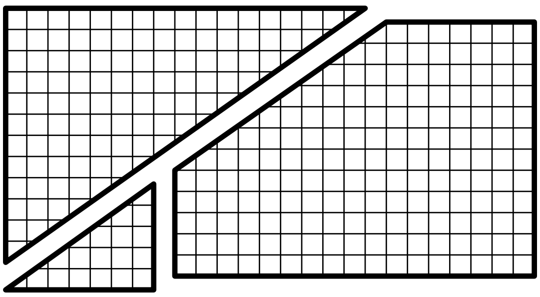
rys. 1



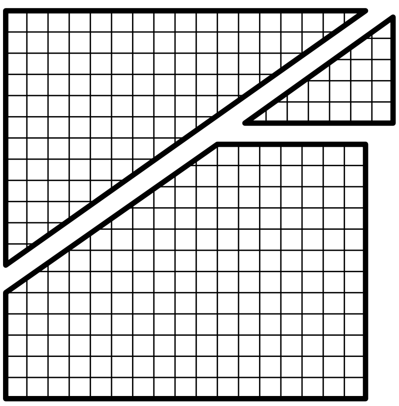
rys. 2



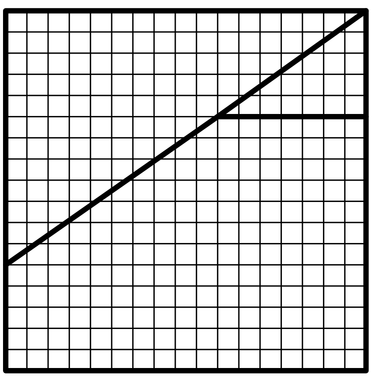
rys. 3



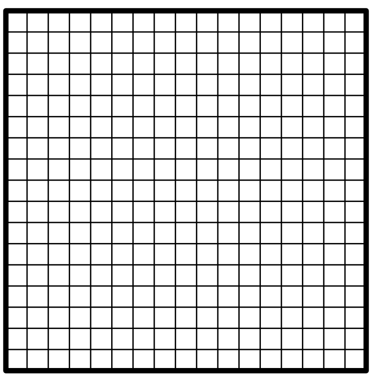
rys. 4



rys. 5



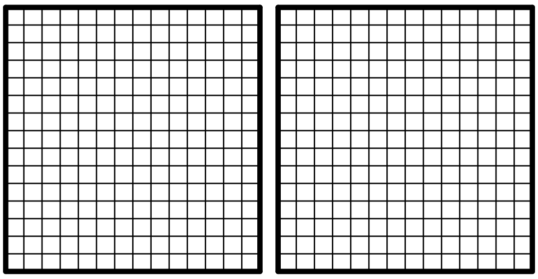
rys. 6



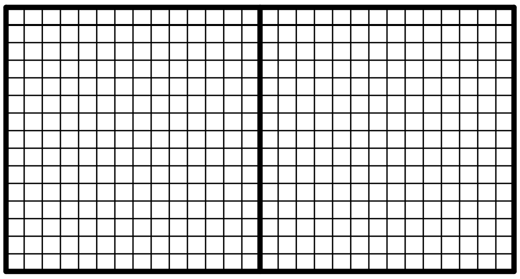
rys. 7

Óadne kfiatki XXIX

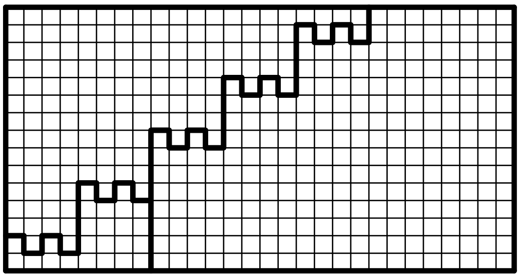
Podwojenie kwadratu po raz drugi, czyli graficzny dowód wymierności liczby $\sqrt{2}$.



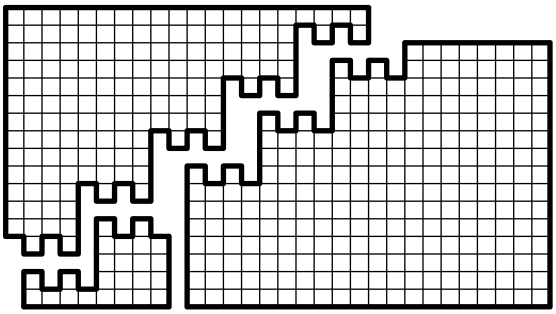
rys. 8



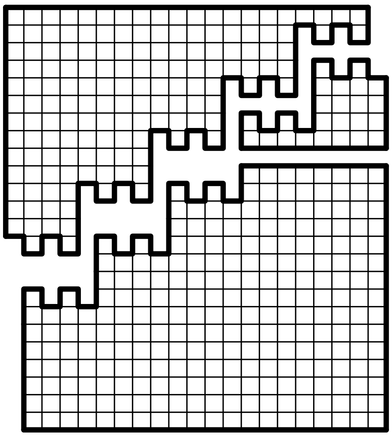
rys. 9



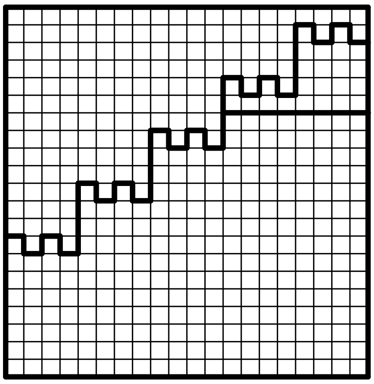
rys. 10



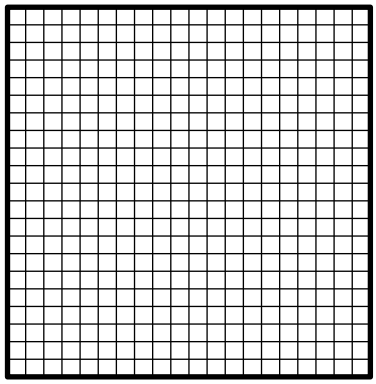
rys. 11



rys. 12



rys. 13



rys. 14

Óadne kfiatki XXX

$$\frac{2+64}{3+6} = \frac{2\cancel{+}64}{3\cancel{+}6} = \frac{264}{36}$$

$$\frac{4+72}{11+8} = \frac{4\cancel{+}72}{11\cancel{+}8} = \frac{472}{118}$$

$$\frac{4+84}{5+5} = \frac{4\cancel{+}84}{5\cancel{+}5} = \frac{484}{55}$$

$$\frac{4+73}{8+6} = \frac{4\cancel{+}73}{8\cancel{+}6} = \frac{473}{86}$$

$$\frac{6+93}{8+4} = \frac{6\cancel{+}93}{8\cancel{+}4} = \frac{693}{84}$$

Óadne kfiatki XXXI

$$\frac{7\times 84}{12\times 8} = \frac{7\cancel{\times}84}{12\cancel{\times}8} = \frac{784}{128}$$

$$\frac{4\times 48}{9\times 45} = \frac{4\cancel{\times}48}{9\cancel{\times}45} = \frac{448}{945}$$

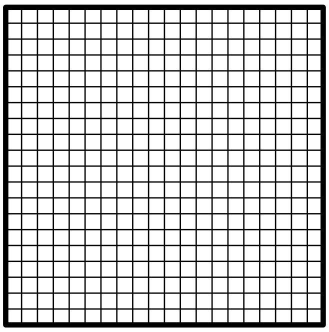
$$\frac{8\times 96}{18\times 9} = \frac{8\cancel{\times}96}{18\cancel{\times}9} = \frac{896}{189}$$

$$\frac{9\times 75}{63\times 7} = \frac{9\cancel{\times}75}{63\cancel{\times}7} = \frac{975}{637}$$

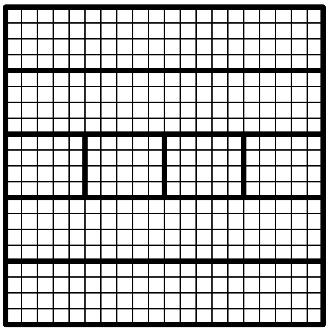
$$\frac{9\times 72}{14\times 7} = \frac{9\cancel{\times}72}{14\cancel{\times}7} = \frac{972}{147}$$

Óadne kfiatki XXXII

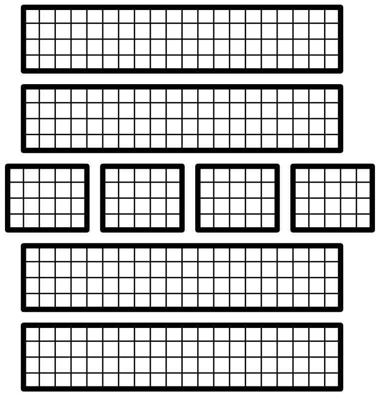
Podwojenie kwadratu po raz trzeci, czyli graficzny dowód wymierności liczby $\sqrt{2}$.



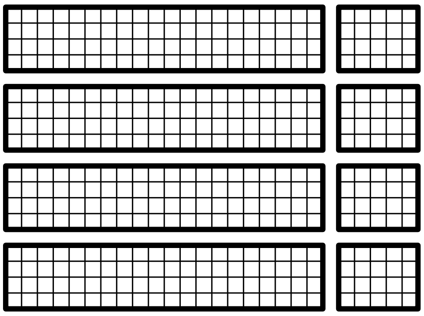
rys. 15



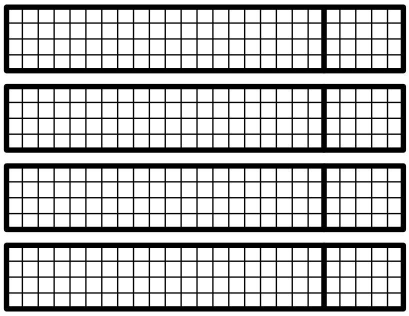
rys. 16



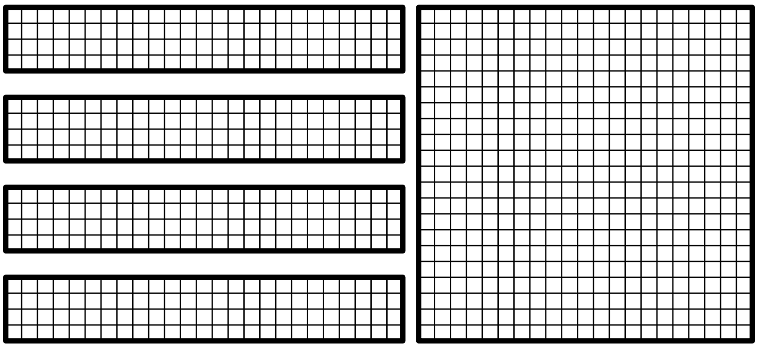
rys. 17



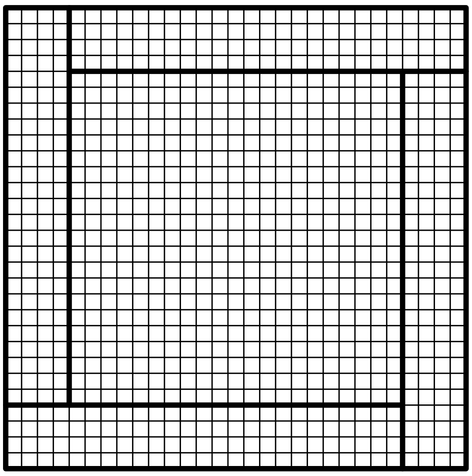
rys. 18



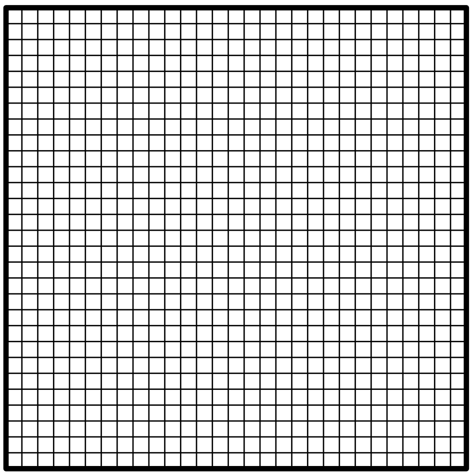
rys. 19



rys. 20



rys. 21



rys. 22

Óadne kfiatki XXXIII

$$\sqrt[3]{36\cdot 6} = \sqrt[\cancel{3}]{\cancel{3}6\cdot 6} = \sqrt{6\cdot 6} \qquad \sqrt[4]{6\cdot 24} = \sqrt[\cancel{4}]{6\cdot 2\cancel{4}} = \sqrt{6\cdot 2}$$

$$\sqrt[3]{32\cdot 128} = \sqrt[\cancel{3}]{\cancel{3}2\cdot 128} = \sqrt{2\cdot 128} \qquad \sqrt[3]{3125\cdot 5} = \sqrt[\cancel{3}]{\cancel{3}125\cdot 5} = \sqrt{125\cdot 5}$$

Óadne kfiatki XXXIV

$$\log_{\sqrt{2}}2\cdot\log_{\sqrt{2}}2=\log_{\sqrt{2}}(2+2)$$

Óadne kfiatki XXXV

$$\log_{25}121=\log_{\cancel{2}5}1\cancel{2}1=\log_5 11$$

Óadne kfiatki XXXVI

Oblicz wartość wyrażenia

$$\binom{2k}{k}\cdot\sqrt{\frac{\sin x}{n}}$$

dla $k=2$, $n=3$, $x=30^\circ$.

Rozwiązanie:

$$\binom{2k}{k}\cdot\sqrt{\frac{\sin x}{n}}=\frac{2k!}{k!\cdot k!}\cdot\sqrt{\frac{\sin x}{n}}=\frac{2\cancel{k!}}{k!\cdot\cancel{k!}}\cdot\sqrt{\frac{\mathrm{si}\cancel{n}\,x}{\cancel{n}}}=\frac{2}{k!}\cdot\sqrt{\mathrm{six}}=\frac{2}{2!}\cdot\sqrt{6}=\frac{2}{2}\cdot\sqrt{6}=\sqrt{6}\,.$$

Odpowiedź: Wartość wyrażenia $\binom{2k}{k}\cdot\sqrt{\frac{\sin x}{n}}$ dla $k=2$, $n=3$, $x=30^\circ$ jest równa $\sqrt{6}$.

Óadne kfiatki XXXVII

$$\frac{20}{9} = \frac{4}{3}\cdot\frac{5}{3} = \left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}+1\right) = 1+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+1 = 1+\frac{2}{9}+1 = \frac{20}{9}$$

$$\frac{77}{25} = \frac{11}{5}\cdot\frac{7}{5} = \left(2+\frac{1}{5}\right)\cdot\left(\frac{2}{5}+1\right) = 2+\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5}+1 = 2+\frac{2}{25}+1 = \frac{77}{25}$$

$$\frac{242}{49} = \frac{11}{7}\cdot\frac{22}{7} = \left(2-\frac{3}{7}\right)\cdot\left(\frac{1}{7}+3\right) = 2-\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{7}+3 = 2-\frac{3}{49}+3 = \frac{242}{49}$$

$$\frac{9}{2} = 3\cdot\frac{3}{2} = (1+2)\cdot\left(2-\frac{1}{2}\right) = 1+2\cdot 2-\frac{1}{2} = 1+4-\frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

Óadne kfiatki XXXVIII

$$\sqrt[6]{64} = \sqrt[\cancel{6}]{\cancel{6}4} = \sqrt{4}$$

Óadne kfiatki XXXIX

$$\sqrt[6]{625:5} = \sqrt[\cancel{6}]{\cancel{6}25:5} = \sqrt{25:5}$$

Óadne kfiatki XL

$$\sqrt[3]{2253-56}=\sqrt[\cancel{3}]{225\cancel{3}-56}=\sqrt{225-56} \qquad \sqrt[7]{137-9}=\sqrt[\cancel{7}]{13\cancel{7}-9}=\sqrt{13-9}$$

$$\sqrt[6]{130666-13017} = \sqrt[\cancel{6}]{13066\cancel{6}-13017} = \sqrt{13066-13017}$$

$$\sqrt[9]{21859-2176} = \sqrt[\cancel{9}]{2185\cancel{9}-2176} = \sqrt{2185-2176}$$

Óadne kfiatki XLI

$$\sqrt[5]{\frac{1}{121\sqrt{11}}+\frac{2}{\sqrt{11}}} = \sqrt[5]{\frac{1}{121\sqrt{11}}+\frac{2}{\sqrt{11}}} = \sqrt[5]{\frac{1}{121\sqrt{11}}+\frac{2}{\sqrt{11}}} = \sqrt[5]{\frac{1}{121\sqrt{11}}+\frac{2}{\sqrt{11}}}$$