Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **426**, **427**, **428** i **429** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

426. Zapisz liczbę 25 używając cyfr 1, 8 i 8.

427. Zapisz liczbę 8192 używając cyfr 2, 2 i 4.

428. Zapisz liczbę 204 używając cyfr 4, 6 i 7 (każdej tylko raz). Podaj dwa istotnie różne rozwiązania.

Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 54 (14/2016)

Piątek, 8 kwietnia 2016 r.

Facebookowy konkurs Trapezu – Zadanie Tygodnia

429. Zapisz jak najmniejszą liczbę całkowitą większą od 200 używając cyfr 4, 6 i 8 (każdej tylko raz). Przez *jak najmniejszą* rozumiemy *najmniejszą spośród liczb zapisanych przez uczestników konkursu.* Tym razem osoby biorące udział w konkursie mogą odpowiadać wielokrotnie.

Zadania wokół chińskiego twierdzenia o resztach

430. Udowodnij istnienie takiej liczby całkowitej dodatniej n, że dla dowolnej liczby pierwszej $p<100$ reszta z dzielenia liczby n przez $2p$ jest najmniejszą liczbą pierwszą większą od p.

431. Znajdź liczby całkowite dodatnie a, b, c spełniające równanie

$$a^4+b^5=c^6\,.$$

Rozwiązania zadań 421–425

421. $60=\dfrac{(3!)!}{3!+3!}=\sqrt{(3!)!\cdot 3!-(3!)!}$

422. $243=\dfrac{(3!)!}{3}+3=\dfrac{3^{3!}}{3}$

423. $245=\dfrac{(3!)!}{3}+5$

424. *Rozwiązanie błędne:* Niech $a<b$ będą długościami przyprostokątnych wyjściowego trójkąta prostokątnego. Po wydłużeniu krótszej przyprostokątnej o 200% otrzymamy trójkąt prostokątny o przyprostokątnych $3a$ i b. Zgodnie z warunkami zadania krótsza przyprostokątna tego trójkąta ma długość $2a$, skąd $b=2a$. Zatem przeciwprostokątna wyjściowego trójkąta ma długość $a\sqrt{5}$, a trójkąta zmodyfikowanego $a\sqrt{13}$. Wyliczamy bezpośrednio, że $\sqrt{13/5}\approx 1,61245$.

Odpowiedź: Długość przeciwprostokątnej zwiększyła się o $61,245\%$.

Rozwiązanie poprawne: A kto powiedział, że jak w trójkącie zmienimy długość jednego boku, to automatycznie jakoś zmienią się długości dwóch pozostałych boków?

W trójkącie prostokątnym obowiązuje następująca terminologia:
- krótsza przyprostokątna = najkrótszy bok trójkąta
- przeciwprostokątna = najdłuższy bok trójkąta
- dłuższa przyprostokątna = środkowy (ze względu na długość) bok trójkąta

Niech $a<b<c$ będą długościami boków wyjściowego trójkąta prostokątnego. Po wydłużeniu najkrótszego boku o 200% otrzymujemy trójkąt o bokach długości $3a$, b, c. Skoro najkrótszy bok tego trójkąta ma długość $2a$, to musi być $b=2a$ i $c=a\sqrt{5}$. Zmodyfikowany

trójkąt ma więc boki długości $2a$, $a\sqrt{5}$ i $3a$, jest więc trójkątem prostokątnym o przeciwprostokątnej $3a$. Widzimy, że przeciwprostokątna wyjściowego trójkąta ma długość $a\sqrt{5}$, a trójkąta zmodyfikowanego $3a$. Wyliczamy, że $3/\sqrt{5} \approx 1{,}34164$.

Odpowiedź: Długość przeciwprostokątnej zwiększyła się o $34{,}164\%$.

Uwaga: Zadanie w istocie polega na odgadnięciu interpretacji niejasnej treści w sposób zgodny z intencją autora. Wykorzystywanie takich zadań w konkursach powinno być **surowo zakazane przez 365*) dni w roku.**

*) Proponowany czas zakazu dotyczy roku przestępnego i obejmuje okresy od 1 stycznia do 31 marca i od 2 kwietnia do 31 grudnia.

425. Jako pierwszy kwadrat magiczny przyjmijmy kwadrat o parami względnie pierwszych wyrazach, np.

37	103	61
91	67	43
73	31	97

Drugim kwadratem niech zaś będzie najprostszy kwadrat magiczny

2	9	4
7	5	3
6	1	8

przeskalowany przez wymnożenie wyrazów przez liczbę $2^p \cdot 3^q \cdot 5^r \cdot 7^s$, czyli kwadrat

$2^{p+1} \cdot 3^q \cdot 5^r \cdot 7^s$	$2^p \cdot 3^{q+2} \cdot 5^r \cdot 7^s$	$2^{p+2} \cdot 3^q \cdot 5^r \cdot 7^s$
$2^p \cdot 3^q \cdot 5^r \cdot 7^{s+1}$	$2^p \cdot 3^q \cdot 5^{r+1} \cdot 7^s$	$2^p \cdot 3^{q+1} \cdot 5^r \cdot 7^s$
$2^{p+1} \cdot 3^{q+1} \cdot 5^r \cdot 7^s$	$2^p \cdot 3^q \cdot 5^r \cdot 7^s$	$2^{p+3} \cdot 3^q \cdot 5^r \cdot 7^s$

Liczby p, q, r i s powinny spełniać następujące układy kongruencji:

$$\begin{cases} p+1 \equiv 0 \pmod{37} \\ p \equiv 0 \pmod{103} \\ p+2 \equiv 0 \pmod{61} \\ p \equiv 0 \pmod{91} \\ p \equiv 0 \pmod{97} \\ p \equiv 0 \pmod{43} \\ p+1 \equiv 0 \pmod{73} \\ p \equiv 0 \pmod{31} \\ p+3 \equiv 0 \pmod{97} \end{cases} \qquad \begin{cases} q \equiv 0 \pmod{37} \\ q+2 \equiv 0 \pmod{103} \\ q \equiv 0 \pmod{61} \\ q \equiv 0 \pmod{91} \\ q \equiv 0 \pmod{67} \\ q+1 \equiv 0 \pmod{43} \\ q+1 \equiv 0 \pmod{73} \\ q \equiv 0 \pmod{31} \\ q \equiv 0 \pmod{97} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r \equiv 0 \pmod{37} \\ r \equiv 0 \pmod{103} \\ r \equiv 0 \pmod{61} \\ r \equiv 0 \pmod{91} \\ r+1 \equiv 0 \pmod{67} \\ r \equiv 0 \pmod{43} \\ r \equiv 0 \pmod{73} \\ r \equiv 0 \pmod{31} \\ r \equiv 0 \pmod{97} \end{cases} \qquad \begin{cases} s \equiv 0 \pmod{37} \\ s \equiv 0 \pmod{103} \\ s \equiv 0 \pmod{61} \\ s+1 \equiv 0 \pmod{91} \\ s \equiv 0 \pmod{67} \\ s \equiv 0 \pmod{43} \\ s \equiv 0 \pmod{73} \\ s \equiv 0 \pmod{31} \\ s \equiv 0 \pmod{97} \end{cases}$$

Powyższe układy kongruencji mają rozwiązanie na mocy chińskiego twierdzenia o resztach.