Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

# TRAPEZ

**Nr 55 (15/2016)**

**Piątek, 15 kwietnia 2016 r.**

### Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **432–436** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

**432.** Zapisz liczbę 41 używając cyfr 2, 3 i 5 (każdej tylko raz).

**433.** Zapisz liczbę 42 używając cyfr 2, 3 i 5 (każdej tylko raz). Podaj dwa istotnie różne rozwiązania.

**434.** Zapisz liczbę 56 używając cyfr 2, 3 i 5 (każdej tylko raz).

**435.** Zapisz liczbę 245 używając cyfr 2, 3 i 5 (każdej tylko raz).

### Facebookowy konkurs Trapezu – Zadanie Tygodnia

**436.** Zapisz liczbę 3905 używając cyfr 1, 2, 3, 3 i 5.

### Zadania wokół chińskiego twierdzenia o resztach

**437.** Znajdź liczby całkowite dodatnie $a$, $b$, $c$ spełniające równanie

$$a^3+b^5=c^6\,.$$

**438.** Udowodnij, że istnieje 2016 kolejnych liczb całkowitych dodatnich, z których żadna nie jest postaci $a^2b^3$, gdzie $a$, $b$ są liczbami całkowitymi.

### Rozwiązania zadań 426–431

**426.** $25=\left(\sqrt{8+8}\right)!+1$

**427.** $8192=\sqrt{2^{4!}}\cdot 2=\sqrt{2^{4!+2}}$

**428.** $204=\dfrac{7!}{4!}-6=\sqrt{\sqrt{\sqrt{6^{4!}}-7!}}$

**429.** $204=\sqrt{8!+6^4}$

**430.** Zgodnie z warunkami zadania liczba $n$ powinna spełniać następujący układ kongruencji:

$$\begin{cases} n \equiv 3 \pmod{4} \\ n \equiv 5 \pmod{6} \\ n \equiv 7 \pmod{10} \\ n \equiv 11 \pmod{14} \\ n \equiv 13 \pmod{22} \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\dots\dots \\ n \equiv p_{k+1} \pmod{2p_k} \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\dots\dots \\ n \equiv 97 \pmod{178} \\ n \equiv 101 \pmod{194} \end{cases}$$

Powyższy układ kongruencji ma rozwiązanie na mocy chińskiego twierdzenia o resztach w wersji ogólnej przedstawionej na końcu tego numeru Trapezu. W celu sprawdzenia założeń tego twierdzenia należy zauważyć, że dla $1\leqslant i<j\leqslant 25$ mamy $\mathrm{NWD}(2p_i,\,2p_j)=2$ oraz $p_{i+1}\equiv p_{j+1} \pmod{2}$.

Jak zwykle przyjęliśmy, że $p_k$ oznacza $k$-tą liczbę pierwszą.

**431.** Zauważmy, że w danym w zadaniu równaniu

$$a^4+b^5=c^6 \tag{1}$$

stosunek sumy do pierwszego składnika jest kwadratem liczby wymiernej. Za punkt wyjścia weźmy więc równość, która ma taką właśnie własność, np. $1+3=4$. Mnożąc tę równość przez $2^p\cdot 3^q$ otrzymujemy

$$2^p\cdot 3^q+2^p\cdot 3^{q+1}=2^{p+2}\cdot 3^q\,. \tag{2}$$

Dla uzyskania rozwiązania równania (1) postaramy się dobrać takie $p$ i $q$, aby dopasować odpowiednie elementy równości (2) do równania (1). W tym celu poszukamy liczb $p$ i $q$ spełniających następujące układy kongruencji:

$$\begin{cases} p & \equiv & 0 & \pmod 4\\ p & \equiv & 0 & \pmod 5\\ p+2 & \equiv & 0 & \pmod 6\end{cases} \qquad \begin{cases} q & \equiv & 0 & \pmod 4\\ q+1 & \equiv & 0 & \pmod 5\\ q & \equiv & 0 & \pmod 6\end{cases}$$

Nietrudno zauważyć, że powyższe układy kongruencji są spełnione przez $p=40$ oraz $q=24$, co prowadzi do następującego rozwiązania równania (1):

$$a=2^{10}\cdot 3^6\,,\qquad b=2^8\cdot 3^5\,,\qquad c=2^7\cdot 3^4\,.$$

*Uwaga:* Próba uzyskania rozwiązania równania (1) z równości $2^p+2^p=2^{p+1}$ skończy się niepowodzeniem, dostaniemy bowiem do rozwiązania układ kongruencji

$$\begin{cases} p & \equiv & 0 & \pmod 4\\ p & \equiv & 0 & \pmod 5\\ p+1 & \equiv & 0 & \pmod 6\end{cases}$$

Powyższy układ nie ma rozwiązania, gdyż pierwsza kongruencja wymaga, aby liczba $p$ była parzysta, podczas gdy z ostatniej kongruencji wynika nieparzystość liczby $p$.

## Chińskie twierdzenie o resztach w $\pi$-gułce (wersja ogólna)

Chińskie twierdzenie o resztach (w wersji ogólnej) brzmi następująco:
Niech $k$ będzie liczbą całkowitą dodatnią i niech dane będą liczby całkowite dodatnie $m_1$, $m_2$, $m_3$, …, $m_k$ oraz liczby całkowite $r_1$, $r_2$, $r_3$, …, $r_k$ spełniające warunek

$$r_i\equiv r_j \;(\text{mod NWD}\,(m_i,\,m_j)) \qquad \text{dla} \quad 1\leqslant i<j\leqslant k\,.$$

Wówczas układ kongruencji

$$\begin{cases} n & \equiv & r_1 & (\text{mod } m_1)\\ n & \equiv & r_2 & (\text{mod } m_2)\\ n & \equiv & r_3 & (\text{mod } m_3)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots\dots\\ n & \equiv & r_k & (\text{mod } m_k)\end{cases}$$

ma rozwiązanie całkowite $n$. Co więcej, istnieje dokładnie jedno rozwiązanie nieujemne $n<\text{NWW}\,(m_1,\,m_2,\,m_3,\,\dots,\,m_k)$, a wszystkie pozostałe rozwiązania całkowite uzyskuje się z niego przez dodanie/odjęcie wielokrotności $\text{NWW}\,(m_1,\,m_2,\,m_3,\,\dots,\,m_k)$.

Bez użycia kogruencji możemy wyrazić to następująco: Jeżeli zażyczymy sobie, że liczba $n$ ma dawać przy dzieleniu przez $m_i$ resztę $r_i$ dla $i=1,2,3,\dots,k$, to takie życzenia daje się zrealizować, o ile nie stoją one w oczywistej sprzeczności, jak na przykład jednoczesne żądanie, że liczba $n$ ma być parzysta i nieparzysta (zobacz uwagę do rozwiązania zadania **431**).