Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO
TRAPEZ
Nr 56 (16/2016)
Piątek, 22 kwietnia 2016 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **439**, **440**, **441** i **442** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

439. Zapisz liczbę 71 używając cyfr 2, 4 i 7 (każdej tylko raz). Podaj dwa istotnie różne rozwiązania.

440. Zapisz liczbę 152 używając cyfr 2, 4 i 7 (każdej tylko raz).

441. Zapisz liczbę 154 używając cyfr 2, 4 i 7 (każdej tylko raz).

Facebookowy konkurs Trapezu – Zadanie Tygodnia

442. Zapisz jak najmniejszą liczbę całkowitą większą od 10^7 używając cyfr 6, 8 i 9 (każdej tylko raz). Przez *jak najmniejszą* rozumiemy *najmniejszą spośród liczb zapisanych przez uczestników konkursu.* Tym razem osoby biorące udział w konkursie mogą odpowiadać wielokrotnie.

Zadanie wokół chińskiego twierdzenia o resztach

443. Znajdź liczby całkowite dodatnie a, b, c spełniające równanie

$$a^3+b^6=c^8\,.$$

Rozwiązania zadań 432–438

432. $41=(3!)^2+5$

433. $42=3!\cdot(5+2)=\dfrac{5!}{3}+2$

434. $56=5!-2^{3!}$

435. $245=3^5+2$

436. $3905=\sqrt{\dfrac{(2^{3!})!}{\left(\sqrt{(3!)!\cdot 5}\right)!}+1}$

437. Za punkt wyjścia do skonstruowania rozwiązania równania

$$a^3+b^5=c^6 \tag{1}$$

przyjmijmy równość $1+7=8$. Mnożąc tę równość przez $2^p\cdot 7^q$ otrzymujemy

$$2^p\cdot 7^q+2^p\cdot 7^{q+1}=2^{p+3}\cdot 7^q\,. \tag{2}$$

Dla uzyskania rozwiązania równania (1) postaramy się dobrać takie p i q, aby dopasować odpowiednie elementy równości (2) do równania (1). W tym celu poszukamy liczb p i q spełniających następujące układy kongruencji:

$$\begin{cases} p \equiv 0 \pmod 3\\ p \equiv 0 \pmod 5\\ p+3 \equiv 0 \pmod 6\end{cases} \qquad \begin{cases} q \equiv 0 \pmod 3\\ q+1 \equiv 0 \pmod 5\\ q \equiv 0 \pmod 6\end{cases}$$

Nietrudno zauważyć, że powyższe układy kongruencji są spełnione przez $p=15$ oraz $q=24$, co prowadzi do następującego rozwiązania równania (1):

$$a=2^5\cdot 7^8\,,\qquad b=2^3\cdot 7^5\,,\qquad c=2^3\cdot 7^4\,.$$

438. *Sposób I*: Zauważmy, że liczba całkowita dodatnia jest postaci a^2b^3, gdzie a, b są liczbami całkowitymi, wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jej dzielnik pierwszy występuje w jej rozkładzie na czynniki pierwsze w potędze większej od 1. Równoważnie: liczba nie jest postaci a^2b^3 wtedy i tylko wtedy, gdy posiada taki dzielnik pierwszy p, że nie jest ona podzielna przez p^2.

Warunki zadania spełniają więc kolejne liczby od n do $n+2015$, gdzie liczba całkowita dodatnia n jest rozwiązaniem następującego układu kongruencji:

$$\begin{cases} n & \equiv & 2 & \pmod{4} \\ n+1 & \equiv & 3 & \pmod{9} \\ n+2 & \equiv & 5 & \pmod{25} \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots & \dots\dots\dots\dots \\ n+k-1 & \equiv & p_k & \pmod{p_k^2} \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots & \dots\dots\dots\dots \\ n+2015 & \equiv & p_{2016} & \pmod{p_{2016}^2} \end{cases} \tag{3}$$

Taka liczba n istnieje na mocy chińskiego twierdzenia o resztach.

Sposób II: Niech N będzie liczbą całkowitą dodatnią, którą sprecyzujemy później. Rozważmy zbiór wszystkich liczb postaci $a^2b^3 \leqslant N^6$, gdzie a, b są liczbami całkowitymi dodatnimi. Ponieważ nierówność $a^2b^3 \leqslant N^6$ pociąga za sobą nierówności

$$a \leqslant N^3 \quad \text{oraz} \quad b \leqslant N^2\,, \tag{4}$$

takich liczb jest nie więcej niż par (a, b) spełniających nierówności (4). A faktycznie jest ich znacznie mniej, gdyż wiele par liczb (a, b) spełniających warunki (4) prowadzi do iloczynów a^2b^3 większych od N^6, a ponadto wiele par (a, b) może prowadzić do tej samej wartości a^2b^3. Zauważmy, że par spełniających nierówności (4) jest N^5. Zatem wśród liczb całkowitych dodatnich nie większych od N^6 jest mniej niż N^5 liczb postaci żądanej w zadaniu. Podzielmy zbiór $\{1, 2, 3, \dots, N^6\}$ na N^5 zbiorów, z których każdy zawiera N kolejnych liczb. Wówczas w co najmniej jednym takim zbiorze nie ma żadnej liczby postaci a^2b^3. To dowodzi istnienia N kolejnych liczb, z których żadna nie jest tej postaci. Dla zakończenia rozwiązania zadania wystarczy przyjąć $N = 2016$.

Uwagi: Pierwszy sposób dowodzi istnienia liczb spełniających warunki zadania mniejszych od $(p_{2016}\#)^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot \ldots \cdot p_{2016}^2 \approx 1{,}98997 \cdot 10^{15100}$, podczas gdy drugi sposób wykazuje istnienie takich liczb poniżej $2016^6 \approx 6{,}7134 \cdot 10^{19}$.

Istnieją jednak metody, wykraczające poza prezentowanie w Trapezie zagadnienia, które pozwalają na efektywne rozwiązywanie układów kongruencji pojawiających się w chińskim twierdzeniu o resztach. Pomimo konieczności użycia liczb mających kilkanaście tysięcy cyfr, znalezienie rozwiązania układu kongruencji (3) nie stanowi żadnego problemu dla współczesnych komputerów i dostępnych algorytmów. Zatem rozwiązanie prezentowane w sposobie pierwszym można wykorzystać do efektywnego znalezienia liczb spełniających warunki zadania.

Gdyby już ktoś zabierał się za obliczenia komputerowe, mógłby nieco „zaoszczędzić" modyfikując układ kongruencji (3). Na przykład z pierwszej kogruencji układu wynika, że liczby postaci $n+4k$ są podzielne przez 2, a nie są podzielne przez 4. Można więc na podstawie tej obserwacji usunąć z układu (3) prawie co czwartą kongruencję.

Tymczasem sposób drugi zawiera dowód czysto egzystencjalny, czyli dowód istnienia nie dający absolutnie żadnych wskazówek, jak znaleźć przykład liczb spełniających warunki zadania.