

Łamigłówki i zadania na weekend

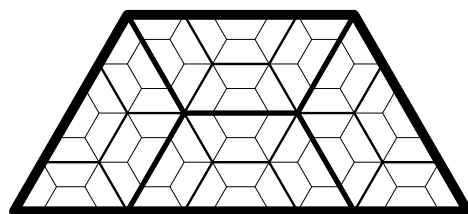
W łamigłówkach **450–454** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

450. Zapisz liczbę 26 używając cyfr 7, 8 i 9 (każdej tylko raz).

451. Zapisz liczbę 29 używając cyfr 7, 8 i 9 (każdej tylko raz). Podaj trzy istotnie różne rozwiązania.

452. Zapisz liczbę 88 używając cyfr 7, 8 i 9 (każdej tylko raz).

453. Zapisz liczbę 213 używając cyfr 7, 8 i 9 (każdej tylko raz).



Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 58 (18/2016)

Piątek, 6 maja 2016 r.

Facebookowy konkurs Trapezu – Zadanie Tygodnia

454. Zapisz jak najmniejszą liczbę całkowitą większą od 1 000 006 używając cyfr 3, 3, 4 i 6. Przez *jak najmniejszą* rozumiemy *najmniejszą spośród liczb zapisanych przez uczestników konkursu*. Tym razem osoby biorące udział w konkursie mogą odpowiadać wielokrotnie.

Zadania wokół chińskiego twierdzenia o resztach

455. Znajdź liczby całkowite dodatnie a, b, c, d spełniające równanie

$$a^3 + b^4 + c^5 = d^6.$$

456. Rozstrzygnij, ile istnieje takich liczb całkowitych dodatnich $n < 19\# = 9\,699\,690$, że żadna z liczb $n, n+2$ nie ma dzielnika pierwszego mniejszego od 20.

457. Znajdź takie liczby całkowite dodatnie a, b, c , że liczby a^4, b^5, c^6 (w tej właśnie kolejności) tworzą rosnący postęp arytmetyczny trójwyrazowy.

Rozwiązania zadań 444–449

444. $250 = 4^4 - 3!$

445. $132 = 3 \cdot 44$

446. $1320 = (3!)^4 + 4!$

447. Za punkt wyjścia do skonstruowania rozwiązania równania

$$a^{10} + b^{12} = c^{14} \tag{1}$$

przyjmijmy równość $9 + 16 = 25$. Mnożąc tę równość przez $2^p \cdot 3^q \cdot 5^r$ otrzymujemy

$$2^p \cdot 3^{q+2} \cdot 5^r + 2^{p+4} \cdot 3^q \cdot 5^r = 2^p \cdot 3^q \cdot 5^{r+2}. \tag{2}$$

Aby uzyskać rozwiązanie równania (1) postaramy się dobrać takie p, q i r , aby dopasować odpowiednie elementy równości (2) do równania (1). W tym celu poszukamy liczb p, q i r spełniających następujące układy kongruencji:

$$\begin{cases} p \equiv 0 \pmod{10} \\ p+4 \equiv 0 \pmod{12} \\ p \equiv 0 \pmod{14} \end{cases} \quad \begin{cases} q+2 \equiv 0 \pmod{10} \\ q \equiv 0 \pmod{12} \\ q \equiv 0 \pmod{14} \end{cases} \quad \begin{cases} r \equiv 0 \pmod{10} \\ r \equiv 0 \pmod{12} \\ r+2 \equiv 0 \pmod{14} \end{cases}$$

Nietrudno zauważyć, że powyższe układy kongruencji są spełnione przez $p=140, q=168$ oraz $r=180$, co prowadzi do następującego rozwiązania równania (1):

$$a = 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{18}, \quad b = 2^{12} \cdot 3^{14} \cdot 5^{15}, \quad c = 2^{10} \cdot 3^{12} \cdot 5^{13}.$$



448. W rozwiązaniu zadania skorzystamy z następującego twierdzenia: Jeżeli p jest liczbą pierwszą dającą przy dzieleniu przez 4 resztę 3, to kongruencja

$$a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod{p}$$

nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych a, b niepodzielnych przez p . Twierdzenie to jest konsekwencją nieistnienia rozwiązań kongruencji $r^2 \equiv -1 \pmod{p}$, co w zaawansowanej teorii liczb wypowiadamy następująco: Liczba -1 jest nieresztą kwadratową modulo p .

Ze sformułowanego powyżej twierdzenia wynika, że liczba postaci $a^2 + b^2$ może być podzielna przez liczbę pierwszą $p \equiv 3 \pmod{4}$ tylko wtedy, gdy a i b są podzielne przez p . Wtedy jednak liczba $a^2 + b^2$ jest podzielna przez p^2 . Stąd wniosek, że liczba podzielna przez p , ale niepodzielna przez p^2 nie może być sumą dwóch kwadratów.

Przez analogię do oznaczenia k -tej liczby pierwszej przez p_k , przyjmijmy oznaczenie q_k dla k -tej liczby pierwszej dającej przy dzieleniu przez 4 resztę 3, zwracając przy tym uwagę, że takich liczb pierwszych jest nieskończenie wiele.

Po tym wprowadzeniu stwierdzamy, że warunki zadania spełniają kolejne liczby od n do $n + 2015$, gdzie liczba całkowita dodatnia n jest rozwiązaniem następującego układu kongruencji:

$$\begin{cases} n & \equiv 3 & (\text{mod } 9) \\ n+1 & \equiv 7 & (\text{mod } 49) \\ n+2 & \equiv 11 & (\text{mod } 121) \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ n+k-1 & \equiv q_k & (\text{mod } q_k^2) \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ n+2015 & \equiv q_{2016} & (\text{mod } q_{2016}^2) \end{cases}$$

Taka liczba n istnieje na mocy chińskiego twierdzenia o resztach.

Uwaga: Fakt będący przedmiotem zadania, oczywiście po zamianie liczby 2016 na dowolną liczbę naturalną, ma interesującą interpretację geometryczną. Ponieważ dla każdej liczby naturalnej N istnieją kolejne liczby od n do $n + N$, z których żadna nie jest sumą dwóch kwadratów, pierścień kołowy zawarty między okręgami o środkach w punkcie $(0, 0)$ i promieniach $\sqrt{n-1}$ oraz $\sqrt{n+N+1}$ nie zawiera punktów kratowych (czyli punktów o obu współrzędnych całkowitych). Wprawdzie pierścień ten ma, przy ogromnej liczbie n , niesłychanie małą grubość, ale można w nim zmieścić odcinek o długości $2\sqrt{N}$.

Płynie stąd następujący wniosek: Dla odcinka dowolnie dużej długości istnieje pierścień kołowy niezawierający punktów kratowych, w którym to pierścieniu można taki odcinek umieścić. W konsekwencji podczas obrotu tego odcinka wokół środka pierścienia, odcinek cały czas jest zawarty w pierścieniu i wobec tego nie napotyka na swojej drodze żadnych punktów kratowych.

Powyższy scenariusz stanowi piękne rozwiązanie następującego problemu: W każdym punkcie kratowym płaszczyzny wbity jest nieskończenie cienki gwóźdź. Na płaszczyźnie położono bardzo długą nieskończenie cienką igłę. Igła jest położona równolegle do jednej z osi układu współrzędnych. Igłę możemy przesuwać po płaszczyźnie, ale jej ruch ograniczają wbite gwoździe. Czy można tak poruszać igłą, aby po zakończeniu ruchu jej kierunek zmienił się o 90° w stosunku do położenia pierwotnego?



449. Z warunku $f(125) \leq f(128) = 189$ wynika $f(5) \leq 63$. Z nierówności $f(24) \leq f(25)$ oraz $f(80) \leq f(81)$ otrzymujemy odpowiednio

$$f(3) + 81 \leq 2 \cdot f(5) \quad \text{oraz} \quad f(5) + 108 \leq 4 \cdot f(3),$$

skąd

$$f(5) + 108 \leq 4 \cdot (2 \cdot f(5) - 81) = 8 \cdot f(5) - 324,$$

co prowadzi do $432 \leq 7 \cdot f(5)$, czyli $f(5) \geq 62$.

Gdyby $f(5) = 62$, mielibyśmy $f(81) \geq f(80) = 170$, skąd $f(3) \geq 43$. W konsekwencji $f(48) \geq 151$, co wobec $f(50) = 151$ przeczy parzystości liczby $f(49)$.

n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$
2	27	37	141	72	167	107		142	194	177	
3	43	38	142	73	168	108	183	143	194	178	
4	54	39	143	74	168	109		144	194	179	
5	63	40	144	75	169	110	184	145	195	180	203
6	70	41	145	76	169	111	184	146	195	181	203
7	76	42	146	77	170	112	184	147	195	182	203
8	81	43		78	170	113		148	195	183	204
9	86	44	148	79		114	185	149		184	204
10	90	45	149	80	171	115	186	150	196	185	204
11	94	46	150	81	172	116	186	151	196	186	204
12	97	47	151	82	172	117	186	152	196	187	205
13	100	48	151	83	173	118		153	197	188	205
14	103	49	152	84	173	119	187	154	197	189	205
15	106	50	153	85	174	120	187	155	197	190	205
16	108	51	154	86		121	188	156	197	191	205
17	111	52	154	87	175	122	188	157		192	205
18	113	53		88	175	123	188	158		193	
19	115	54	156	89		124	188	159		194	
20	117	55	157	90	176	125	189	160	198	195	206
21	119	56	157	91	176	126	189	161	199	196	206
22	121	57	158	92	177	127	189	162	199	197	
23	123	58	159	93	177	128	189	163	199	198	207
24	124	59		94	178	129		164	199	199	207
25	126	60	160	95	178	130	190	165	200	200	207
26	127	61	161	96	178	131		166	200	201	
27	129	62	161	97		132	191	167	200	202	
28	130	63	162	98	179	133	191	168	200	203	208
29	132	64	162	99	180	134		169	200	204	208
30	133	65	163	100	180	135	192	170	201	205	208
31	134	66	164	101		136	192	171	201	206	208
32	135	67		102	181	137		172		207	209
33	137	68	165	103	181	138	193	173			
34	138	69	166	104	181	139	193	174	202		
35	139	70	166	105	182	140	193	175	202		
36	140	71	167	106		141	194	176	202		



Zatem $f(5) = 63$. Wówczas $f(81) \geq f(80) = 171$, co daje $f(3) \geq 43$ i $f(48) \geq 151$. Ponieważ $f(50) = 153$ otrzymujemy $f(49) = 152$, skąd $f(7) = 76$. Równość $f(126) = 189$ prowadzi teraz do $f(3) = 43$. W dalszym uzupełnianiu tabelki korzystamy z parzystości liczb $f(121)$ i $f(169)$. Dochodzimy do sytuacji przedstawionej w tabeli na poprzedniej stronie.

Z nierówności $f(86) \geq f(85) = 174$ i $f(129) \leq f(130) = 190$ otrzymujemy $f(43) = 147$, a z nierówności $f(106) \geq f(105) = 182$ oraz $f(159) \leq f(160) = 198$ wynika $f(53) = 155$. To pozwala dokończyć rozwiązywanie łamigłówki:

n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$
2	27	37	141	72	167	107	182	142	194	177	202
3	43	38	142	73	168	108	183	143	194	178	202
4	54	39	143	74	168	109	183	144	194	179	202
5	63	40	144	75	169	110	184	145	195	180	203
6	70	41	145	76	169	111	184	146	195	181	203
7	76	42	146	77	170	112	184	147	195	182	203
8	81	43	147	78	170	113	184	148	195	183	204
9	86	44	148	79	170	114	185	149	195	184	204
10	90	45	149	80	171	115	186	150	196	185	204
11	94	46	150	81	172	116	186	151	196	186	204
12	97	47	151	82	172	117	186	152	196	187	205
13	100	48	151	83	173	118	186	153	197	188	205
14	103	49	152	84	173	119	187	154	197	189	205
15	106	50	153	85	174	120	187	155	197	190	205
16	108	51	154	86	174	121	188	156	197	191	205
17	111	52	154	87	175	122	188	157	197	192	205
18	113	53	155	88	175	123	188	158	197	193	205
19	115	54	156	89	175	124	188	159	198	194	205
20	117	55	157	90	176	125	189	160	198	195	206
21	119	56	157	91	176	126	189	161	199	196	206
22	121	57	158	92	177	127	189	162	199	197	206
23	123	58	159	93	177	128	189	163	199	198	207
24	124	59	159	94	178	129	190	164	199	199	207
25	126	60	160	95	178	130	190	165	200	200	207
26	127	61	161	96	178	131	190	166	200	201	207
27	129	62	161	97	178	132	191	167	200	202	207
28	130	63	162	98	179	133	191	168	200	203	208
29	132	64	162	99	180	134	191	169	200	204	208
30	133	65	163	100	180	135	192	170	201	205	208
31	134	66	164	101	180	136	192	171	201	206	208
32	135	67	164	102	181	137	192	172	201	207	209
33	137	68	165	103	181	138	193	173	201		
34	138	69	166	104	181	139	193	174	202		
35	139	70	166	105	182	140	193	175	202		
36	140	71	167	106	182	141	194	176	202		

