Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **458**, **459**, **460** i **461** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

458. Zapisz liczbę 175 używając cyfr 3, 4 i 5 (każdej tylko raz).

459. Zapisz liczbę 210 używając cyfr 3, 4 i 5 (każdej tylko raz).

460. Zapisz liczbę 300 używając cyfr 3, 4 i 5 (każdej tylko raz). Podaj dwa istotnie różne rozwiązania.

Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO
TRAPEZ
Nr 59 (19/2016)
Piątek, 13 maja 2016 r.

Facebookowy konkurs Trapezu – Zadanie Tygodnia

461. Zapisz jak najmniejszą liczbę całkowitą większą od 280000 używając cyfr 5, 6 i 7 (każdej tylko raz). Przez *jak najmniejszą* rozumiemy *najmniejszą spośród liczb zapisanych przez uczestników konkursu.* Tym razem osoby biorące udział w konkursie mogą odpowiadać wielokrotnie.

Zadania wokół chińskiego twierdzenia o resztach

462. Udowodnij, że istnieją liczby całkowite dodatnie a, b, c, d spełniające równanie
$$a^{30}+b^{34}+c^{60}=d^{63}\,.$$

463. Rozstrzygnij, ile istnieje takich liczb całkowitych dodatnich $n<19\#=9\,699\,690$, że żadna z czterech liczb n, $n+2$, $n+6$, $n+8$ nie ma dzielnika pierwszego mniejszego od 20.

464. Znajdź takie liczby całkowite dodatnie a, b, c, że liczby a^2, b^4, c^6 (w tej właśnie kolejności) tworzą rosnący postęp arytmetyczny trójwyrazowy.

Rozwiązania zadań 450–457

450. $26=\dfrac{78}{\sqrt{9}}$

451. $29=\dfrac{87}{\sqrt{9}}=\sqrt{\sqrt{\left(\left(\sqrt{9}\right)!\right)^{8}}-7}=7\cdot\sqrt{9}+8$

452. $88=\sqrt{\sqrt{9^8}+7}$

453. $213=\sqrt{8!+7!+9}$

454. $1000188=4\cdot 63^3$

455. Za punkt wyjścia do skonstruowania rozwiązania równania
$$a^3+b^4+c^5=d^6 \tag{1}$$
przyjmijmy równość $1+1+62=64$. Mnożąc tę równość przez $2^p\cdot 31^q$ otrzymujemy
$$2^p\cdot 31^q+2^p\cdot 31^q+2^{p+1}\cdot 31^{q+1}=2^{p+6}\cdot 31^q\,. \tag{2}$$
Dla uzyskania rozwiązania równania (1) postaramy się dobrać takie p i q, aby dopasować odpowiednie elementy równości (2) do równania (1). W tym celu poszukamy liczb p i q spełniających następujące układy kongruencji:
$$\begin{cases} p \equiv 0 \pmod 3\\ p \equiv 0 \pmod 4\\ p+1 \equiv 0 \pmod 5\\ p+6 \equiv 0 \pmod 6\end{cases} \qquad \begin{cases} q \equiv 0 \pmod 3\\ q \equiv 0 \pmod 4\\ q+1 \equiv 0 \pmod 5\\ q \equiv 0 \pmod 6\end{cases}$$
Nietrudno zauważyć, że powyższe układy kongruencji są spełnione przez $p=24$ oraz $q=24$, co prowadzi do następującego rozwiązania równania (1):
$$a=2^8\cdot 31^8\,,\qquad b=2^6\cdot 31^6\,,\qquad c=2^5\cdot 31^5\,,\qquad d=2^5\cdot 31^4\,.$$

456. Warunki zadania spełniają liczby n będące rozwiązaniem następującego układu kongruencji:

$$\begin{cases} n \equiv 1 \pmod 2 \\ n \equiv 2 \pmod 3 \\ n \equiv r_5 \pmod 5 \\ n \equiv r_7 \pmod 7 \\ n \equiv r_{11} \pmod{11} \\ n \equiv r_{13} \pmod{13} \\ n \equiv r_{17} \pmod{17} \\ n \equiv r_{19} \pmod{19} \end{cases}$$

gdzie r_p może przyjmować $p-2$ wartości dodatnich mniejszych od p. Ponieważ każda szóstka liczb r_p prowadzi do jednej liczby n spełniającej warunki zadania, takich liczb n jest $3\cdot 5\cdot 9\cdot 11\cdot 15\cdot 17 = 378\,675$.

Uwagi: Brak dzielnika pierwszego mniejszego od 20 jest, przy założeniu, że $n>20$, warunkiem koniecznym na to, aby liczby n i $n+2$ były jednocześnie liczbami pierwszymi (takie pary liczb nazywamy liczbami bliźniaczymi, najprawdopodobniej jest ich nieskończenie wiele, ale jak dotąd nie ma na to dowodu).

Z rozwiązania zadania wynika, że wśród dowolnych $19\# = 9\,699\,690$ kolejnych liczb naturalnych większych od 20 istnieje 378 675 takich liczb n, że liczby n i $n+2$ nie mają dzielników pierwszych mniejszych od 20. To stanowi około 3,9% rozważanych kolejnych liczb. Gdyby więc ktoś chciał szukać par liczb bliźniaczych przez bezpośrednie testowanie pierwszości, to wstępne wyeliminowanie par liczb, z których co najmniej jedna ma dzielnik pierwszy mniejszy od 20, skróciłoby poszukiwania ponad 25-krotnie.

Zastąpienie liczby 20 liczbą 100, czyli odsianie par liczb, z których co najmniej jedna ma dzielnik pierwszy mniejszy od 100, pozostawia do sprawdzenia około 1,9% par, natomiast w przypadku "zatroszczenia się" o czynniki pierwsze poniżej 1000, do weryfikacji zostaje około 0,87% par.

457. Za punkt wyjścia do skonstruowania rozwiązania równania

$$a^4 + c^6 = 2b^5\,, \tag{3}$$

które przy założeniu $a^4 < c^6$ jest równoważne własności podanej w treści zadania, przyjmijmy równość $1+9=10$. Mnożąc tę równość przez $3^p\cdot 5^q$ otrzymujemy

$$3^p\cdot 5^q + 3^{p+2}\cdot 5^q = 2\cdot 3^p\cdot 5^{q+1}\,. \tag{4}$$

Aby znaleźć rozwiązanie równania (3) wskażemy takie p i q, aby odpowiednie elementy równości (4) odpowiadały odpowiednim elementom równania (3). Takie liczby p i q powinny spełniać następujące układy kongruencji:

$$\begin{cases} p \equiv 0 \pmod 4 \\ p+2 \equiv 0 \pmod 6 \\ p \equiv 0 \pmod 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} q \equiv 0 \pmod 4 \\ q \equiv 0 \pmod 6 \\ q+1 \equiv 0 \pmod 5 \end{cases}$$

Na mocy chińskiego twierdzenia o resztach istnieją liczby całkowite dodatnie p i q spełniające powyższy układ kongruencji. Nietrudno zauważyć, że takimi liczbami są na przykład $p=40$ i $q=24$. To prowadzi do

$$a = 3^{10}\cdot 5^6, \qquad b = 3^8\cdot 5^5, \qquad c = 3^7\cdot 5^4\,.$$