Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

# TRAPEZ

**Nr 60 (20/2016)**
**Piątek, 20 maja 2016 r.**

## Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **465–469** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

**465.** Zapisz liczbę 57 używając cyfr 4, 7 i 9 (każdej tylko raz).

**466.** Zapisz liczbę 58 używając cyfr 4, 7 i 9 (każdej tylko raz).

**467.** Zapisz liczbę 59 używając cyfr 4, 7 i 9 (każdej tylko raz).

**468.** Zapisz liczbę 60 używając cyfr 4, 7 i 9 (każdej tylko raz).

## Facebookowy konkurs Trapezu – Zadanie Tygodnia

**469.** Zapisz liczbę 294 używając cyfr 2, 5, 6 i 6.

## Zadania wokół chińskiego twierdzenia o resztach

**470.** Znajdź liczby całkowite dodatnie $a$, $b$, $c$, $d$ spełniające równanie

$$a^4+b^6+c^{12}=d^{16}\,.$$

**471.** Rozstrzygnij, ile istnieje takich liczb całkowitych dodatnich $n<19\#=9\,699\,690$, że żadna z ośmiu liczb $n$, $n+2$, $n+6$, $n+8$, $n+30$, $n+32$, $n+36$, $n+38$ nie ma dzielnika pierwszego mniejszego od 20.

**472.** Znajdź takie liczby całkowite dodatnie $a$, $b$, $c$, $d$, że liczby $a^2$, $b^3$, $c^4$, $d^5$ (w tej właśnie kolejności) tworzą rosnący postęp arytmetyczny czterowyrazowy.

## Rozwiązania zadań 458–464

**458.** $175=\dfrac{(3!)!}{4}-5$

**459.** $210=\dfrac{(3!)!+5!}{4}$

**460.** $300=\dfrac{(3!)!}{4}+5!=\dfrac{(3!)!-5!}{\sqrt{4}}$

**461.** $280056=6^7+5!$

**462.** Za punkt wyjścia do skonstruowania rozwiązania równania

$$a^{30}+b^{34}+c^{60}=d^{63} \tag{1}$$

przyjmijmy równość $1+25+1=27$. Mnożąc tę równość przez $3^p\cdot 5^q$ otrzymujemy

$$3^p\cdot 5^q+3^p\cdot 5^{q+2}+3^p\cdot 5^q=3^{p+3}\cdot 5^q\,. \tag{2}$$

Aby udowodnić istnienie rozwiązania równania (1) wykażemy istnienie takich $p$ i $q$, że odpowiednie elementy równości (2) odpowiadają elementom równania (1). Takie liczby $p$ i $q$ powinny spełniać następujące układy kongruencji:

$$\begin{cases} p \equiv 0 \pmod{30} \\ p \equiv 0 \pmod{34} \\ p \equiv 0 \pmod{60} \\ p+3 \equiv 0 \pmod{63} \end{cases} \qquad \begin{cases} q \equiv 0 \pmod{30} \\ q+2 \equiv 0 \pmod{34} \\ q \equiv 0 \pmod{60} \\ q \equiv 0 \pmod{63} \end{cases}$$

Na mocy chińskiego twierdzenia o resztach istnieją liczby całkowite dodatnie $p$ i $q$ spełniające powyższy układ kongruencji. Wówczas liczby

$$a=3^{p/30}\cdot 5^{q/30}\,, \qquad b=3^{p/34}\cdot 5^{(q+2)/34}\,, \qquad c=3^{p/60}\cdot 5^{q/60}\,, \qquad d=3^{(p+3)/63}\cdot 5^{q/63}$$

spełniają równanie (1).

*Uwaga:* Można wyliczyć, że liczbami spełniającymi układ kongruencji są $p=5100$ oraz $q=20160$.

**463.** Warunki zadania spełniają liczby $n$ będące rozwiązaniem następującego układu kongruencji:

$$\begin{cases} n \equiv 1 \pmod 2 \\ n \equiv 2 \pmod 3 \\ n \equiv 1 \pmod 5 \\ n \equiv r_7 \pmod 7 \\ n \equiv r_{11} \pmod{11} \\ n \equiv r_{13} \pmod{13} \\ n \equiv r_{17} \pmod{17} \\ n \equiv r_{19} \pmod{19} \end{cases}$$

gdzie $r_p$ może przyjmować $p-4$ wartości dodatnich mniejszych od $p$. Ponieważ każda piątka liczb $r_p$ prowadzi do jednej liczby $n$ spełniającej warunki zadania, takich liczb $n$ jest $3\cdot 7\cdot 9\cdot 13\cdot 15=36\,855$.

*Uwagi:* Brak dzielnika pierwszego mniejszego od 20 jest, przy założeniu, że $n>20$, warunkiem koniecznym na to, aby liczby $n$, $n+2$, $n+6$ i $n+8$ były jednocześnie liczbami pierwszymi (takie czwórki liczb pierwszych nazywamy czworaczkami, najprawdopodobniej jest ich nieskończenie wiele, ale jak dotąd nie ma na to dowodu).

Z rozwiązania zadania wynika, że wśród dowolnych $19\#=9\,699\,690$ kolejnych liczb naturalnych większych od 20 istnieje $36\,855$ takich liczb $n$, że liczby $n$, $n+2$, $n+6$ i $n+8$ nie mają dzielników pierwszych mniejszych od 20. To stanowi około $0,38\%$ rozważanych kolejnych liczb. Gdyby więc ktoś chciał szukać czworaczków liczb pierwszych przez bezpośrednie testowanie pierwszości, to wstępne wyeliminowanie czwórek liczb, z których co najmniej jedna ma dzielnik pierwszy mniejszy od 20, skróciłoby poszukiwania ponad 250-krotnie.

**464.** Za punkt wyjścia do skonstruowania rozwiązania równania

$$a^2+c^6=2b^4\,, \tag{3}$$

które przy założeniu $a^2<c^6$ jest równoważne własności podanej w treści zadania, przyjmijmy równość $1+49=50$. Mnożąc tę równość przez $5^p\cdot 7^q$ otrzymujemy

$$5^p\cdot 7^q+5^p\cdot 7^{q+2}=2\cdot 5^{p+2}\cdot 7^q\,. \tag{4}$$

W celu znalezienia rozwiązania równania (3) wskażemy takie $p$ i $q$, aby odpowiednie elementy równości (4) odpowiadały odpowiednim elementom równania (3). Takie liczby $p$ i $q$ powinny spełniać następujące układy kongruencji:

$$\begin{cases} p \equiv 0 \pmod 2 \\ p \equiv 0 \pmod 6 \\ p+2 \equiv 0 \pmod 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} q \equiv 0 \pmod 2 \\ q+2 \equiv 0 \pmod 6 \\ q \equiv 0 \pmod 4 \end{cases}$$

Na mocy chińskiego twierdzenia o resztach istnieją liczby całkowite dodatnie $p$ i $q$ spełniające powyższy układ kongruencji. Nietrudno zauważyć, że takimi liczbami są na przykład $p=6$ i $q=4$. To prowadzi do

$$a=5^3\cdot 7^2=6125, \qquad b=5^2\cdot 7^1=175, \qquad c=5^1\cdot 7^1=35\,.$$