Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 61 (21/2016)

Środa, 25 maja 2016 r.

Łamigłówki i zadania na długi weekend

W łamigłówkach **473**, **474**, **475** i **476** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

473. Zapisz liczbę 27 używając cyfr 3 i 4 (każdej tylko raz). Podaj dwa istotnie różne rozwiązania.

474. Zapisz liczbę 721 używając cyfr 3, 3 i 8.

475. Zapisz liczbę 15005 używając cyfr 1, 4, 5 i 5.

Facebookowy konkurs Trapezu – Zadanie Tygodnia

476. Zapisz jak największą liczbę całkowitą mniejszą od 4160 używając cyfr 1, 1, 4 i 7. Przez *jak największą* rozumiemy *największą spośród liczb zapisanych przez uczestników konkursu.* Tym razem osoby biorące udział w konkursie mogą odpowiadać wielokrotnie.

Zadania wokół chińskiego twierdzenia o resztach

477. Liczba naturalna ma taką samą końcówkę czterocyfrową jak jej kwadrat. Jaka to może być końcówka?

478. Udowodnij, że istnieją liczby całkowite dodatnie a, b, c, d spełniające równanie

$$a^4+b^{66}+c^{888}=d^4\,.$$

479. Udowodnij istnienie takich liczb całkowitych dodatnich a, b, c, d, e, że liczby a^{10}, b^{11}, c^{12}, d^{13}, e^{14} (w tej właśnie kolejności) tworzą rosnący postęp arytmetyczny pięciowyrazowy.

Rozwiązania zadań 465–472

465. $57=4^{\sqrt{9}}-7$ **466.** $58=9+\sqrt{7^4}$ **467.** $59=7\cdot 9-4$

468. $60=\sqrt{\left(7-\sqrt{4}\right)\cdot\left(\left(\sqrt{9}\right)!\right)!}$ **469.** $294=\sqrt{((5!)^2+6)\cdot 6}$

Dominik Zygmunt podał $294=(6!-5!)/2-6$

470. Za punkt wyjścia do skonstruowania rozwiązania równania

$$a^4+b^6+c^{12}=d^{16} \tag{1}$$

przyjmijmy równość $16+64+1=81$. Mnożąc tę równość przez $2^p\cdot 3^q$ otrzymujemy

$$2^{p+4}\cdot 3^q+2^{p+6}\cdot 3^q+2^p\cdot 3^q=2^p\cdot 3^{q+4}\,. \tag{2}$$

Aby znaleźć rozwiązanie równania (1) wystarczy wskazać takie p i q, że odpowiednie elementy równości (2) odpowiadają odpowiednim elementom równania (1). Takie liczby p i q powinny spełniać następujące układy kongruencji:

$$\begin{cases} p+4 \equiv 0 \pmod{4} \\ p+6 \equiv 0 \pmod{6} \\ p \equiv 0 \pmod{12} \\ p \equiv 0 \pmod{16} \end{cases} \qquad \begin{cases} q \equiv 0 \pmod{4} \\ q \equiv 0 \pmod{6} \\ q \equiv 0 \pmod{12} \\ q+4 \equiv 0 \pmod{16} \end{cases}$$

Nietrudno zauważyć, że powyższe układy kongruencji są spełnione przez $p=0$ oraz $q=12$, co prowadzi do następującego rozwiązania równania (1):

$$a=2\cdot 3^3=54\,,\qquad b=2\cdot 3^2=18\,,\qquad c=3\,,\qquad d=3\,.$$

471. Warunki zadania spełniają liczby n będące rozwiązaniem następującego układu kongruencji:

$$\begin{cases} n \equiv 1 \pmod 2 \\ n \equiv 2 \pmod 3 \\ n \equiv 1 \pmod 5 \\ n \equiv 2 \pmod 7 \\ n \equiv r_{11} \pmod{11} \\ n \equiv r_{13} \pmod{13} \\ n \equiv r_{17} \pmod{17} \\ n \equiv r_{19} \pmod{19} \end{cases}$$

gdzie r_p może przyjmować $p-7$ wartości dodatnich mniejszych od p. Dokładniej, dopuszczalne wartości r_p to: $r_{11}\in\{2,4,7,10\}$, $r_{13}\in\{2,4,6,8,10,12\}$,

$$r_{17}\in\{1,3,5,6,7,8,10,12,14,16\}, \qquad r_{19}\in\{1,3,4,5,7,9,10,12,14,15,16,18\}.$$

Ponieważ każda czwórka liczb r_p prowadzi do jednej liczby n spełniającej warunki zadania, takich liczb n jest $4\cdot 6\cdot 10\cdot 12=2880$.

Uwagi: Skoro już interesowaliśmy się czworaczkami liczb pierwszych, to naturalne jest pytanie: Jak blisko siebie takie czworaczki mogą wystąpić? Nie licząc najmniejszych czworaczków (5, 7, 11, 13), w których jako jedynych występuje liczba podzielna przez 5, czworaczki liczb pierwszych różnią się tylko cyfrą jedności i mają postać czwórki liczb $(30k+11,\ 30k+13,\ 30k+17,\ 30k+19)$. Stąd wynika, że najmniejsza możliwa odległość takich czworaczków liczb pierwszych to 30, jeśli liczymy tę odległość jako różnicę najmniejszych liczb z każdej czwórki. Do tego właśnie nawiązuje zadanie.

Po wykonaniu przeszukania komputerowego okazuje się jednak, że czworaczki liczb pierwszych odległe o 30 nie występują poniżej miliona. Czyżby taka konfiguracja ośmiu liczb pierwszych nie była jednak możliwa? Nic podobnego. Wystarczy trochę więcej cierpliwości, albowiem tuż za milionem znajdujemy parę blisko siebie położonych czworaczków liczb pierwszych:

$$(1006301,\ 1006303,\ 1006307,\ 1006309) \quad \text{i} \quad (1006331,\ 1006333,\ 1006337,\ 1006339).$$

472. Za punkt wyjścia do skonstruowania postępu arytmetycznego o własnościach podanych w treści zadania przyjmiemy postęp arytmetyczny 1, 5, 9, 13. Mnożąc ten postęp przez $3^p\cdot 5^q\cdot 13^r$ otrzymujemy postęp

$$3^p\cdot 5^q\cdot 13^r, \quad 3^p\cdot 5^{q+1}\cdot 13^r, \quad 3^{p+2}\cdot 5^q\cdot 13^r, \quad 3^p\cdot 5^q\cdot 13^{r+1}. \tag{3}$$

Dobierzemy p, q i r tak, aby wyrazy postępu (3) były odpowiednio drugą, trzecią, czwartą i piątą potęgą. Takie liczby p, q i r powinny spełniać następujące układy kongruencji:

$$\begin{cases} p \equiv 0 \pmod 2 \\ p \equiv 0 \pmod 3 \\ p+2 \equiv 0 \pmod 4 \\ p \equiv 0 \pmod 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} q \equiv 0 \pmod 2 \\ q+1 \equiv 0 \pmod 3 \\ q \equiv 0 \pmod 4 \\ q \equiv 0 \pmod 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} r \equiv 0 \pmod 2 \\ r \equiv 0 \pmod 3 \\ r \equiv 0 \pmod 4 \\ r+1 \equiv 0 \pmod 5 \end{cases}$$

Na mocy chińskiego twierdzenia o resztach istnieją liczby całkowite dodatnie p, q i r spełniające powyższy układ kongruencji. Nietrudno zauważyć, że takimi liczbami są na przykład $p=30$, $q=20$ i $r=24$. To prowadzi do

$$a=3^{15}\cdot 5^{10}\cdot 13^{12}, \qquad b=3^{10}\cdot 5^{7}\cdot 13^{8}, \qquad c=3^{8}\cdot 5^{5}\cdot 13^{6}, \qquad d=3^{6}\cdot 5^{4}\cdot 13^{5}.$$