Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO
TRAPEZ
Nr 62 (22/2016)
Piątek, 3 czerwca 2016 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **480**, **481**, **482** i **483** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

480. Zapisz liczbę 1719 używając cyfr 1, 1, 9 i 9.

481. Zapisz liczbę 1728 używając cyfr 1, 1, 9 i 9.

482. Zapisz liczbę 1729 używając cyfr 1, 1, 9 i 9.

Facebookowy konkurs Trapezu Zadanie Tygodnia

483. Zapisz jak największą liczbę całkowitą mniejszą od 400 używając cyfr 2, 2, 6 i 9. Przez *jak największą* rozumiemy *największą spośród liczb zapisanych przez uczestników konkursu.* Tym razem osoby biorące udział w konkursie mogą odpowiadać wielokrotnie.

Zadania wokół chińskiego twierdzenia o resztach

484. Liczba naturalna ma taką samą końcówkę czterocyfrową jak jej sześcian. Jaka to może być końcówka?

485. Udowodnij, że istnieją liczby całkowite dodatnie a, b, c, d spełniające równanie
$$a^4+b^{66}+c^{888}=d^4$$
oraz warunek $\mathrm{NWD}(a,\, b,\, c,\, d)=1$.

486. Niech k będzie liczbą całkowitą dodatnią. Znajdź liczby całkowite dodatnie a, b, c spełniające równanie
$$a^k+b^{k+1}=c^{k+2}\,.$$

Rozwiązania zadań 473–479

473. $27=4!+3=\sqrt{\sqrt{\sqrt{3^{4!}}}}$ **474.** $721=3^{3!}-8$ **475.** $15005=\sqrt{\frac{(5!+4)!}{(5!)!}+1}$

476. $4159=\sqrt{\frac{14!}{7!}+1}$

477. Własność podaną w treści zadania mają nieujemne liczby $k<10^4$, dla których
$$k^2\equiv k \pmod{10^4}\,,$$
a to jest równoważne układowi kongruencji
$$\begin{cases} k\cdot(k-1) & \equiv & 0 \pmod{16} \\ k\cdot(k-1) & \equiv & 0 \pmod{625}. \end{cases}$$
Rozwiązaniami powyższego układu są takie liczby k, że
$$\begin{cases} k & \equiv & r_2 \pmod{16} \\ k & \equiv & r_5 \pmod{625}, \end{cases}$$
gdzie $r_2, r_5 \in \{0,\, 1\}$. Istnieją cztery nieujemne liczby $k<10^4$ spełniające te warunki. I tak:
- dla $(r_2,r_5)=(0,0)$ otrzymujemy $k=0$,
- dla $(r_2,r_5)=(1,1)$ otrzymujemy $k=1$,
- dla $(r_2,r_5)=(1,0)$ otrzymujemy $k=625$,
- dla $(r_2,r_5)=(0,1)$ otrzymujemy $k=9376$.

Odpowiedź: Warunki zadania spełniają następujące cztery końcówki czterocyfrowe: 0000, 0001, 0625, 9376.

478. Za punkt wyjścia do dowodu istnienia rozwiązania równania

$$a^4+b^{66}+c^{888}=d^4 \tag{1}$$

przyjmijmy równość $16+64+1=81$. Mnożąc tę równość przez $2^p\cdot 3^q$ otrzymujemy

$$2^{p+4}\cdot 3^q+2^{p+6}\cdot 3^q+2^p\cdot 3^q=2^p\cdot 3^{q+4}\,. \tag{2}$$

Aby udowodnić istnienie rozwiązania równania (1) wykażemy istnienie takich p i q, aby odpowiednie elementy równości (2) odpowiadały odpowiednim elementom równania (1). Takie liczby p i q powinny spełniać następujące układy kongruencji:

$$\begin{cases} p+4 \equiv 0 \pmod{4} \\ p+6 \equiv 0 \pmod{66} \\ p \equiv 0 \pmod{888} \\ p \equiv 0 \pmod{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} q \equiv 0 \pmod{4} \\ q \equiv 0 \pmod{66} \\ q \equiv 0 \pmod{888} \\ q+4 \equiv 0 \pmod{4} \end{cases}$$

Na mocy chińskiego twierdzenia o resztach istnieją liczby całkowite nieujemne p i q spełniające powyższy układ kongruencji. Wówczas liczby

$$a=2^{(p+4)/4}\cdot 3^{q/4},\qquad b=2^{(p+6)/66}\cdot 3^{q/66},\qquad c=2^{p/888}\cdot 3^{q/888},\qquad d=2^{p/4}\cdot 3^{(q+4)/4}$$

spełniają równanie (1).

Uwaga: Można wyliczyć, że liczbami spełniającymi układ kongruencji są $p=1776$ i $q=0$, co daje

$$a=2^{445},\qquad b=2^{27},\qquad c=2^2=4,\qquad d=2^{444}\cdot 3\,.$$

479. Za punkt wyjścia do dowodu istnienia postępu arytmetycznego o własnościach podanych w treści zadania przyjmiemy postęp arytmetyczny 1, 13, 25, 37, 49. Mnożąc ten postęp przez $5^p\cdot 7^q\cdot 13^r\cdot 37^s$ otrzymujemy postęp

$$5^p{\cdot}7^q{\cdot}13^r{\cdot}37^r,\;\; 5^p{\cdot}7^q{\cdot}13^{r+1}{\cdot}37^r,\;\; 5^{p+2}{\cdot}7^q{\cdot}13^r{\cdot}37^r,\;\; 5^p{\cdot}7^q{\cdot}13^r{\cdot}37^{r+1},\;\; 5^p{\cdot}7^{q+2}{\cdot}13^r{\cdot}37^r. \tag{3}$$

Liczby p, q, r i s powinny być tak dobrane, aby wyrazy postępu (3) były odpowiednio 10-tą, 11-stą, 12-stą, 13-stą i 14-stą potęgą. Zażądamy więc, aby liczby p, q, r i s spełniały następujące układy kongruencji:

$$\begin{cases} p \equiv 0 \pmod{10} \\ p \equiv 0 \pmod{11} \\ p+2 \equiv 0 \pmod{12} \\ p \equiv 0 \pmod{13} \\ p \equiv 0 \pmod{14} \end{cases} \qquad \begin{cases} q \equiv 0 \pmod{10} \\ q \equiv 0 \pmod{11} \\ q \equiv 0 \pmod{12} \\ q \equiv 0 \pmod{13} \\ q+2 \equiv 0 \pmod{14} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r \equiv 0 \pmod{10} \\ r+1 \equiv 0 \pmod{11} \\ r \equiv 0 \pmod{12} \\ r \equiv 0 \pmod{13} \\ r \equiv 0 \pmod{14} \end{cases} \qquad \begin{cases} s \equiv 0 \pmod{10} \\ s \equiv 0 \pmod{11} \\ s \equiv 0 \pmod{12} \\ s+1 \equiv 0 \pmod{13} \\ s \equiv 0 \pmod{14} \end{cases}$$

Na mocy chińskiego twierdzenia o resztach istnieją liczby całkowite dodatnie p, q, r i s spełniające powyższy układ kongruencji. Prowadzą one do postępu arytmetycznego postaci wymaganej w treści zadania.