Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 63 (23/2016)

Piątek, 10 czerwca 2016 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **487**, **488**, **489** i **490** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

487. Zapisz liczbę 17 używając cyfr 2, 5 i 8 (każdej tylko raz).

488. Zapisz liczbę 200 używając cyfr 2, 5 i 8 (każdej tylko raz).

489. Zapisz liczbę 600 używając cyfr 2, 5 i 8 (każdej tylko raz).

Facebookowy konkurs Trapezu – Zadanie Tygodnia

490. Zapisz jak najmniejszą liczbę całkowitą większą od 399 używając cyfr 2, 5 i 8 (każdej tylko raz). Przez *jak najmniejszą* rozumiemy *najmniejszą spośród liczb zapisanych przez uczestników konkursu.* Tym razem osoby biorące udział w konkursie mogą odpowiadać wielokrotnie.

Zadania wokół chińskiego twierdzenia o resztach

491. Udowodnij, że istnieje taka liczba pierwsza, że 100 liczb ją poprzedzających i 100 liczb po niej następujących to liczby złożone.
Można skorzystać z twierdzenia Dirichleta o liczbach pierwszych w postępach arytmetycznych: W dowolnym rosnącym postępie arytmetycznym o wyrazach całkowitych dodatnich, w którym pierwszy wyraz i różnica postępu są względnie pierwsze, istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych.

492. Udowodnij, że istnieją liczby całkowite dodatnie a, b, c, d spełniające równanie

$$a^2+b^{22}+c^{222}=d^{2222}\,.$$

Rozwiązania zadań 480–486

480. $1719=9\cdot 191$

481. $1728=\left((1+1)\cdot\sqrt{\sqrt{9}}\right)^{(\sqrt{9})!}=\left((1+1)\cdot\left(\sqrt{9}\right)!\right)^{\sqrt{9}}$

482. $1729=91\cdot 19$

483. $398=\sqrt{(6!+2)^2-9!}$

484. Warunki zadania spełniają nieujemne liczby $k<10^4$, dla których

$$k^3\equiv k\,(\mathrm{mod}\ 10^4)\,,$$

a to jest równoważne układowi kongruencji

$$\begin{cases} (k-1)\cdot k\cdot(k+1) & \equiv & 0 & (\mathrm{mod}\ 16)\\ (k-1)\cdot k\cdot(k+1) & \equiv & 0 & (\mathrm{mod}\ 625). \end{cases}$$

Rozwiązaniami powyższego układu są liczby k spełniające kongruencje

$$\begin{cases} k & \equiv & r_2 & (\mathrm{mod}\ 16),\\ k & \equiv & r_5 & (\mathrm{mod}\ 625), \end{cases} \qquad \text{prościej: } k\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ 16)\ \text{ lub }\ k\equiv\pm1\,(\mathrm{mod}\ 8)$$

gdzie $r_2\in\{-7,\,-1,\,0,\,1,\,7\}$ i $r_5\in\{-1,\,0,\,1\}$. Mamy więc piętnaście liczb k spełniających powyższe warunki. I tak:

- dla $(r_2,r_5)=(0,0)$ otrzymujemy $k=0$,
- dla $(r_2,r_5)=(1,1)$ otrzymujemy $k=1$, a dla $(r_2,r_5)=(-7,1)$ mamy $k=5001$,
- dla $(r_2,r_5)=(-1,-1)$ otrzymujemy $k=9999$, a dla $(r_2,r_5)=(7,1)$ mamy $k=4999$,
- dla $(r_2,r_5)=(1,0)$ otrzymujemy $k=625$, a dla $(r_2,r_5)=(-7,1)$ mamy $k=5625$,

- dla $(r_2,r_5)=(-1,0)$ otrzymujemy $k=9375$, a dla $(r_2,r_5)=(7,1)$ mamy $k=4375$,
- dla $(r_2,r_5)=(0,1)$ otrzymujemy $k=9376$,
- dla $(r_2,r_5)=(0,-1)$ otrzymujemy $k=624$,
- dla $(r_2,r_5)=(1,-1)$ otrzymujemy $k=1249$, a dla $(r_2,r_5)=(-7,1)$ mamy $k=6249$,
- dla $(r_2,r_5)=(-1,1)$ otrzymujemy $k=8751$. a dla $(r_2,r_5)=(7,1)$ mamy $k=3751$,

Odpowiedź: Warunki zadania są spełnione przez piętnaście końcówek czterocyfrowych: 0000, 0001, 0624, 0625, 1249, 3751, 4375, 4999, 5001, 5625, 6249, 8751, 9375, 9376, 9999.

485. Podstawiając $a=m-n$ oraz $d=m+n$ otrzymujemy

$$b^{66}+c^{888}=d^4-a^4=8m^3n+8mn^3\,.$$

W celu uzyskania rozwiązania równania

$$a^4+b^{66}+c^{888}=d^4 \tag{1}$$

postaramy sie dobrać takie liczby względnie pierwsze m, n będące różnej parzystości, aby $b^{66}=8m^3n$ oraz $c^{888}=8mn^3$. W tym celu przyjmijmy $m=2^k$ oraz $n=1$. Wówczas liczba k powinna spełniać następujacy układ kogruencji:

$$\begin{cases} 3k+3 \equiv 0 \pmod{66} \\ k+3 \equiv 0 \pmod{888} \end{cases}$$

czyli

$$\begin{cases} k+1 \equiv 0 \pmod{22} \\ k+3 \equiv 0 \pmod{888} \end{cases}$$

Na mocy chińskiego twierdzenia o resztach powyższy układ kongruencji ma rozwiązanie całkowite nieujemne k. Wówczas liczby

$$a=2^k-1, \qquad b=2^{(k+1)/22}, \qquad c=2^{(k+3)/888}, \qquad d=2^k+1$$

spełniają równanie (1).

Uwaga: Można wyliczyć, że liczbą spełniającą układ kongruencji jest $k=2661$, co daje

$$a=2^{2661}-1, \qquad b=2^{121}, \qquad c=2^3=8, \qquad d=2^{2661}+1\,.$$

486. Za punkt wyjścia do skonstruowania rozwiązania równania

$$a^k+b^{k+1}=c^{k+2} \tag{2}$$

weźmiemy równość $1+3=4$. Mnożąc ją przez $2^p\cdot 3^q$ otrzymujemy

$$2^p\cdot 3^q+2^p\cdot 3^{q+1}=2^{p+2}\cdot 3^q\,. \tag{3}$$

Dla uzyskania rozwiązania równania (2) postaramy się dobrać takie p i q, aby dopasować odpowiednie elementy równości (3) do równania (2). W tym celu poszukamy liczb p i q spełniających następujące układy kongruencji:

$$\begin{cases} p \equiv 0 \pmod{k} \\ p \equiv 0 \pmod{k+1} \\ p+2 \equiv 0 \pmod{k+2} \end{cases} \qquad \begin{cases} q \equiv 0 \pmod{k} \\ q+1 \equiv 0 \pmod{k+1} \\ q \equiv 0 \pmod{k+2} \end{cases}$$

Powyższe układy kongruencji są spełnione na przykład przez liczby

$$p=k\cdot(k+1)^2=\Big(k^2+1\Big)\cdot(k+2)-2 \quad \text{oraz} \quad q=k\cdot(k+2)=(k+1)^2-1\,,$$

co prowadzi do następującego rozwiązania równania (2):

$$a=2^{(k+1)^2}\cdot 3^{k+2}\,, \qquad b=2^{k\cdot(k+1)}\cdot 3^{k+1}\,, \qquad c=2^{k^2+1}\cdot 3^k\,.$$