Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 64 (24/2016)
Piątek, 17 czerwca 2016 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **493**, **494**, **495** i **496** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

493. Zapisz liczbę 2193 używając cyfr 1, 3, 3 i 3.

494. Zapisz liczbę 2199 używając cyfr 1, 3, 3 i 3.

495. Zapisz liczbę 2200 używając cyfr 1, 3, 3 i 3.

Facebookowy konkurs Trapezu
Zadanie Tygodnia

496. Zapisz jak najmniejszą liczbę całkowitą większą od 750 używając cyfr 0, 1, 1, 1 i 4. Przez *jak najmniejszą* rozumiemy *najmniejszą spośród liczb zapisanych przez uczestników konkursu.* Tym razem osoby biorące udział w konkursie mogą odpowiadać wielokrotnie.

Zadania wokół chińskiego twierdzenia o resztach

497. Liczba naturalna ma taką samą końcówkę czterocyfrową jak jej piąta potęga. Jaka to może być końcówka?

498. Udowodnij, że istnieją liczby całkowite dodatnie a, b, c, d spełniające równanie
$$a^3+b^{33}+c^{333}=d^{3333}\,.$$

Rozwiązania zadań 487–492

487. $17=\frac{5!}{8}+2$ **488.** $200=25\cdot 8$ **489.** $600=(8-2)!-5!$ **490.** $400=\sqrt{\left(2\cdot\sqrt{5}\right)^8}$

491. Na mocy chińskiego twierdzenia o resztach układ kongruencji
$$\begin{cases} n+1 \equiv 0 \pmod{101!} \\ n+2 \equiv 0 \pmod{103} \end{cases}$$
ma nieskończenie wiele rozwiązań tworzących postęp arytmetyczny o różnicy $101!\cdot 103$, która jest względnie pierwsza z wyrazami tego postępu. Na mocy twierdzenia Dirichleta o liczbach pierwszych w postępach arytmetycznych, istnieje rozwiązanie n będące liczbą pierwszą. Liczba ta spelnia warunki zadania, gdyż złożone są liczby:
- $n-k$ dla $k=1,2,3,\dots,100$ jako podzielne przez $k+1$,
- $n+k$ dla $k=3,4,5,\dots,100$ jako podzielne przez $k-1$,
- $n+1$ jako podzielna przez $101!$,
- $n+2$ jako podzielna przez 103.

492. Konstrukcję rozwiązania równania
$$a^2+b^{22}+c^{222}=d^{2222} \qquad (1)$$
oprzemy na równości
$$m^2+x^{22}+n^2=y^{22}$$
dla odpowiednio dobranych liczb całkowitych dodatnich m, x, n i y. W celu znalezienia rozwiązania powyższego równania, szukamy takich x, y, aby liczba $y^{22}-x^{22}$ była sumą dwóch kwadratów.

W tym miejscu wypada wyjaśnić, iż liczb będących sumami dwóch kwadratów jest na tyle dużo, że sprawdzając po kolei liczby postaci $y^{22}-x^{22}$ możemy mieć nadzieję na znalezienie wśród nich sumy dwóch kwadratów. I to pomimo przeciwności losu, który nie jest dla nas specjalnie łaskawy. Istnieją bowiem powody, dla których liczby postaci $y^{22}-x^{22}$ niechętnie bywają sumami dwóch kwadratów. Otóż z małego twierdzenia Fermata wynika, że *najczęściej* $x^{22}\equiv y^{22}\equiv 1 \pmod{23}$, a więc liczba $y^{22}-x^{22}$ jest podzielna przez 23, a liczba podzielna przez 23 *najczęściej* nie jest sumą dwóch kwadratów. Na szczęście od obu tych *najczęściej* są możliwe odstępstwa: liczba $y^{22}-x^{22}$ nie jest podzielna przez 23, jeżeli x albo y jest podzielne przez 23, a liczba podzielna przez 23 może być sumą dwóch kwadratów, jeżeli jest podzielna przez 23^2.

Z pomocą komputera znajdujemy odpowiednie liczby $x=40$ i $y=41$, dla których

$$41^{22}-40^{22}=3^4\cdot 23^2\cdot 599281\cdot 37765289\cdot 130898631716248441\,,$$

a przy tym

$$599281=500^2+591^2\,,\qquad 37765289=1133^2+6040^2$$

oraz

$$130898631716248441=44124525^2+359098396^2\,.$$

Po wykorzystaniu tożsamości używającej liczb zespolonych

$$\left(s^2+t^2\right)\cdot\left(u^2+v^2\right)=|(s+ti)(u+vi)|^2=|(su-tv)+(sv+tu)i|^2=(su-tv)^2+(sv+tu)^2$$

dochodzimy do

$$\begin{aligned}41^{22}-40^{22}&=136934346024750384^2+328921217899298055^2=\\&=189533500870022055^2+301690627553354616^2=\\&=212491504137819384^2+285985215308118105^2=\\&=246830607385835616^2+256933520512842105^2\,,\end{aligned}$$

możemy zatem przyjąć $m=136934346024750384$ i $n=328921217899298055$.

Otrzymujemy więc równość

$$m^2+40^{22}+n^2=41^{22}\,.$$

Mnożąc tę równość przez $41^p\cdot n^q$ otrzymujemy

$$m^2\cdot 41^p\cdot n^q+40^{22}\cdot 41^p\cdot n^q+41^p\cdot n^{q+2}=41^{p+22}\cdot n^q\,. \tag{2}$$

Aby udowodnić istnienie rozwiązania równania (1) wykażemy istnienie takich p i q, aby odpowiednie elementy równości (2) odpowiadały odpowiednim elementom równania (1). Takie liczby p i q powinny spełniać następujące układy kongruencji:

$$\begin{cases}p\equiv 0 \pmod{2}\\ p\equiv 0 \pmod{22}\\ p\equiv 0 \pmod{222}\\ p+22\equiv 0 \pmod{2222}\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}q\equiv 0 \pmod{2}\\ q\equiv 0 \pmod{22}\\ q+2\equiv 0 \pmod{222}\\ q\equiv 0 \pmod{2222}\end{cases}$$

Na mocy chińskiego twierdzenia o resztach istnieją liczby całkowite dodatnie p i q spełniające powyższy układ kongruencji. Wówczas liczby

$$a=m\cdot 41^{p/2}\cdot n^{q/2},\quad b=40\cdot 41^{p/22}\cdot n^{q/22},\quad c=41^{p/222}\cdot n^{(q+2)/222},\quad d=41^{(p+22)/2222}\cdot n^{q/2222}$$

spełniają równanie (1).

Uwaga: Można wyliczyć, że liczbami spełniającymi układ kongruencji są $p=24420$ i $q=244420$.