Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 65 (25/2016)
Piątek, 24 czerwca 2016 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **499**, **500** i **501** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

499. Zapisz liczbę 33 używając cyfr 0, 1, 3 i 6 (każdej tylko raz). Podaj dwa istotnie różne rozwiązania.

500. Zapisz liczbę 73 używając cyfr 0, 3, 5 i 8 (każdej tylko raz).

501. Zapisz liczbę 142 używając cyfr 2, 4 i 8 (każdej tylko raz).

Wielokąty foremne

502. Który wielokąt foremny ma dwa razy więcej przekątnych niż boków?

503. Który wielokąt foremny ma dziesięć razy więcej przekątnych niż boków?

504. Niech $P(n)$ będzie polem n-kąta foremnego o boku 1. Udowodnij, że

$$P(12)=12\cdot P(3)+6\cdot P(4)\,.$$

Rozwiązania zadań 493–498

493. $2193=3^{3!+1}+3!$ **494.** $2199=((3!)!+13)\cdot 3$ **495.** $2200=13^3+3$

496. $752=\sqrt{4^{11}-10!}$

497. Warunki zadania spełniają nieujemne liczby $k<10^4$, dla których

$$k^5\equiv k\,(\mathrm{mod}\ 10^4)\,,$$

a to jest równoważne układowi kongruencji

$$\begin{cases} (k-1)\cdot k\cdot(k+1)\cdot(k^2+1) & \equiv & 0 & (\mathrm{mod}\ 16) \\ (k-1)\cdot k\cdot(k+1)\cdot(k^2+1) & \equiv & 0 & (\mathrm{mod}\ 625). \end{cases} \tag{1}$$

Pierwsza kongruencja układu (1) jest równoważna temu, że k jest podzielne przez 16 lub nieparzyste. Aby się o tym przekonać, wystarczy zauważyć, że w przypadku nieparzystego k czynniki $k-1$, $k+1$, k^2+1 są parzyste, a ponadto jeden z czynników $k-1$, $k+1$ jest podzielny przez 4.

Z kolei druga kongruencja układu (1) ma pięć rozwiązań (z dokładnością do przystawania modulo 625): są to liczby 0, ± 1 oraz dwa rozwiązania kongruencji

$$k^2\equiv -1\,(\mathrm{mod}\ 625)\,. \tag{2}$$

W celu rozwiązania kongruencji (2) zauważmy najpierw, że rozwiązaniami kongruencji $k^2\equiv -1\,(\mathrm{mod}\ 25)$ są liczby ± 7. Wobec tego rozwiązania kongruencji (2) są postaci $25a\pm 7$, skąd otrzymujemy

$$(25a\pm 7)^2=625a^2\pm 350a+49\equiv 25\cdot(\pm 14a+2)-1\,(\mathrm{mod}\ 625)\,.$$

Nietrudno zauważyć, że dla $a=\pm 7$ zachodzi $\pm 14a+2\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ 25)$, skąd dostajemy rozwiązanie kongruencji (2): $k=\pm 182$.

Podsumowując: Układ kongruencji (1) spełniają liczby k, dla których

$$\begin{cases} k & \equiv & r_2 & (\mathrm{mod}\ 16), \\ k & \equiv & r_5 & (\mathrm{mod}\ 625), \end{cases}$$

gdzie $r_2\in\{-7,\,-5,\,-3,\,-1,\,0,\,1,\,3,\,5,\,7\}$ i $r_5\in\{-182,\,-1,\,0,\,1,\,182\}$.

W konsekwencji istnieje 45 końcówek czterocyfrowych spełniających warunki zadania: 0000, 0001, 0443, 0624, 0625, 0807, 1249, 1251, 1693, 1875, 2057, 2499, 2501, 2943, 3125, 3307, 3568, 3749, 3751, 4193, 4375, 4557, 4999, 5001, 5443, 5625, 5807, 6249, 6251, 6432, 6693, 6875, 7057, 7499, 7501, 7943, 8125, 8307, 8749, 8751, 9193, 9375, 9376, 9557, 9999.

498. Konstrukcję rozwiązania równania

$$a^3+b^{33}+c^{333}=d^{3333} \tag{3}$$

oprzemy na rozwiązaniu równania

$$x^3+y^{33}+z^3=t^{33} \tag{4}$$

w liczbach całkowitych dodatnich x, y, z, t. Z kolei rozwiązanie równania (4) uzyskamy korzystając z tożsamości

$$\left(9m^3-1\right)^3+1+\left(9m^4-3m\right)^3=\left(9m^4\right)^3\,, \tag{5}$$

w której przyjmiemy $m=3^5$. Otrzymujemy równość

$$\left(3^{17}-1\right)^3+1+\left(3^{22}-3^6\right)^3=3^{66}\,, \tag{6}$$

która stanowi rozwiązanie równania (4) z

$$x=3^{17}-1, \qquad y=1, \qquad z=3^{22}-3^6, \qquad t=9\,.$$

Mnożąc równość (6) przez $3^p\cdot n^q$, gdzie $n=3^{16}-1$, dostajemy

$$\left(3^{17}-1\right)^3\cdot 3^p\cdot n^q+3^p\cdot n^q+3^{p+18}\cdot n^{q+3}=3^{p+66}\cdot n^q\,. \tag{7}$$

Aby udowodnić istnienie rozwiązania równania (3) wykażemy istnienie takich p i q, że odpowiednie elementy równości (7) odpowiadają odpowiednim elementom równania (3). Takie liczby p i q powinny spełniać następujące układy kongruencji:

$$\begin{cases} p \equiv 0 \pmod 3 \\ p \equiv 0 \pmod{33} \\ p+18 \equiv 0 \pmod{333} \\ p+66 \equiv 0 \pmod{3333} \end{cases} \qquad \begin{cases} q \equiv 0 \pmod 3 \\ q \equiv 0 \pmod{33} \\ q+3 \equiv 0 \pmod{333} \\ q \equiv 0 \pmod{3333} \end{cases}$$

Na mocy chińskiego twierdzenia o resztach istnieją liczby całkowite dodatnie p i q spełniające powyższy układ kongruencji. Wówczas liczby

$$a=\left(3^{17}-1\right)\cdot 3^{p/3}\cdot\left(3^{16}-1\right)^{q/3}\,, \qquad b=3^{p/33}\cdot\left(3^{16}-1\right)^{q/33}\,,$$

$$c=3^{(p+18)/333}\cdot\left(3^{16}-1\right)^{(q+3)/333}\,, \qquad d=3^{(p+66)/3333}\cdot\left(3^{16}-1\right)^{q/3333}$$

spełniają równanie (3).

Uwagi: Można wyliczyć, że liczbami spełniającymi podane wyżej układy kongruencji są $p=53262$ i $q=366630$.

Tożsamość (5) po podstawieniu $m=3^k$ prowadzi do równości

$$\left(3^{3k+2}-1\right)^3+1+\left(3^{4k+2}-3^{k+1}\right)^3=3^{12k+6}\,,$$

czyli uzyskujemy rozwiązanie równań

$$x^3+1+z^3=3^{12k+6} \qquad \text{oraz} \qquad x^3+y^{12k+6}+z^3=t^{12k+6}\,.$$