Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 67 (27/2016)

Piątek, 8 lipca 2016 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **511**, **512** i **513** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

511. Zapisz liczbę 77 używając cyfr 1, 2, 3 i 5 (każdej tylko raz).

512. Zapisz liczbę 81 używając cyfr 2, 3 i 5 (każdej tylko raz).

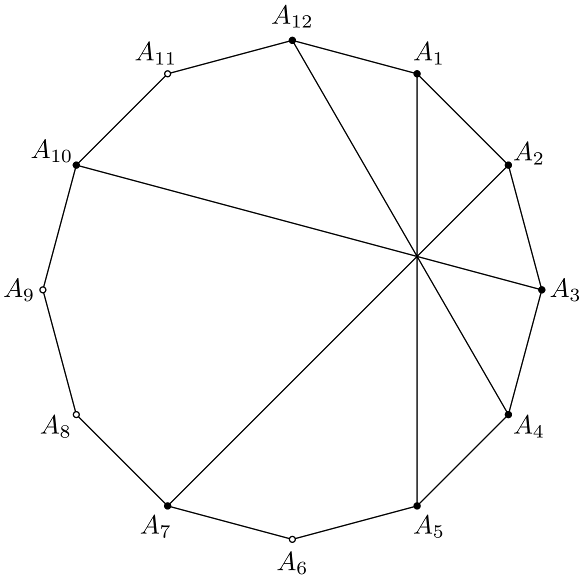
513. Zapisz liczbę 82 używając cyfr 3, 3, 5 i 7.

Wielokąty foremne

514. Sześciokąt foremny ma 9 przekątnych. A czy istnieje taka liczba naturalna $n>6$, że liczba przekątnych n-kąta foremnego jest kwadratem liczby całkowitej?

515. Czy istnieje taka liczba naturalna $n>3$, że liczba przekątnych n-kąta foremnego jest sześcianem liczby całkowitej?

516. Udowodnij, że w dwunastokącie foremnym $A_1A_2A_3\dots A_{12}$ przekątne A_1A_5, A_2A_7, A_3A_{10} i A_4A_{12} przecinają się w jednym punkcie (rys. 1).



rys. 1

Rozwiązania zadań 505–510

505. $3127=5^{8-3}+2$

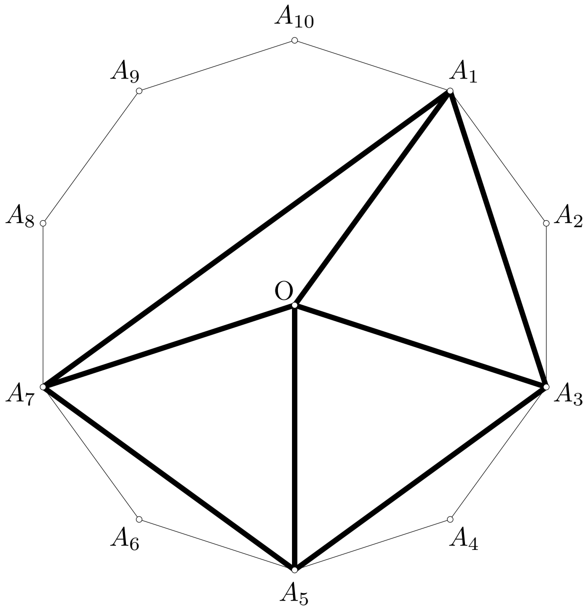
506. $3131=\left(\frac{8!}{(3!)!}\right)^2-5$ **507.** $3133=5^{3+2}+8$

508. Liczba przekątnych n-kata foremnego jest równa $n\cdot(n-3)/2$. Liczba ta jest podzielna przez 3 tylko wtedy, gdy liczby n oraz $n-3$ są podzielne przez 3, a wówczas jest ona podzielna przez 9.

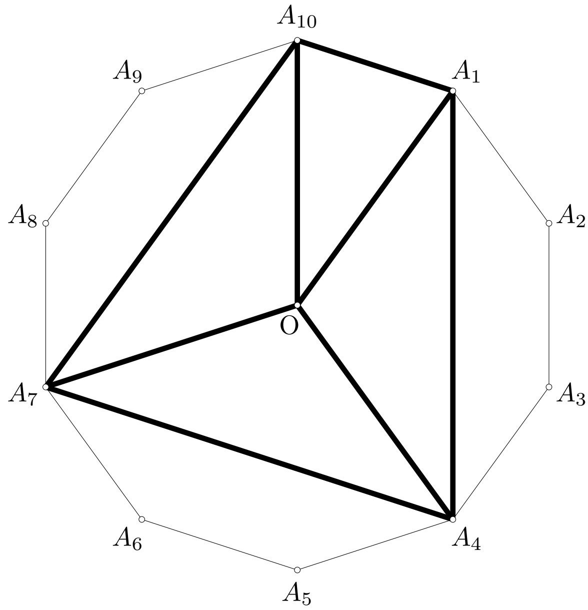
509. Liczba przekątnych n-kata foremnego jest równa $n\cdot(n-3)/2$. Zauważmy, że liczba n przy dzieleniu przez 3 daje resztę 0, 1 lub 2, a wówczas liczba $n\cdot(n-3)/2$ daje przy dzieleniu przez 3 odpowiednio resztę 0, 2 lub 2. Zatem liczba przekątnych wielokąta foremnego nigdy nie daje przy dzieleniu przez 3 reszty 1. W szczególności nie może mieć sumy cyfr równej 2017.

510. *Sposób I:* Połączmy wierzchołki każdego z danych trapezów ze środkiem okręgu opisanego na dziesięciokącie (rys. 2 i 3).

Zauważmy, że w dowolnym trójkącie ABC wpisanym w okrąg o środku O i średnicy AB (rys. 4), promień OC jest środkową trójkąta ABC, skąd wynika równość pól trójkątów AOC i BOC. Przy tym miary kątów $\sphericalangle AOC$ i $\sphericalangle BOC$ sumują się do 180°. Stąd wniosek, że pola dwóch trójkątów mających po dwa wierzchołki leżące na tym samym okręgu, a trzeci w środku tego okręgu, są równe, jeżeli ich kąty przy wierzchołku będącym środkiem okręgu sumują się do 180°. To oznacza, że pola trójkątów przystających A_1OA_3, A_3OA_5 i A_5OA_7 o kątach przy wierzchołku O mających po 72° są takie same jak pola trójkątów przystających A_1OA_4, A_4OA_7 i A_7OA_{10} o kątach przy wierzchołku O mających po 108°. Ponadto pole trójkąta A_7OA_1 o kącie $\sphericalangle A_7OA_1=144°$ jest równe polu trójkąta $A_{10}OA_1$ o kącie $\sphericalangle A_{10}OA_1=36°$. Te obserwacje kończą rozwiązanie zadania.



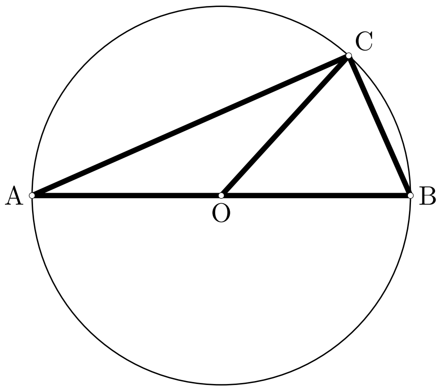
rys. 2



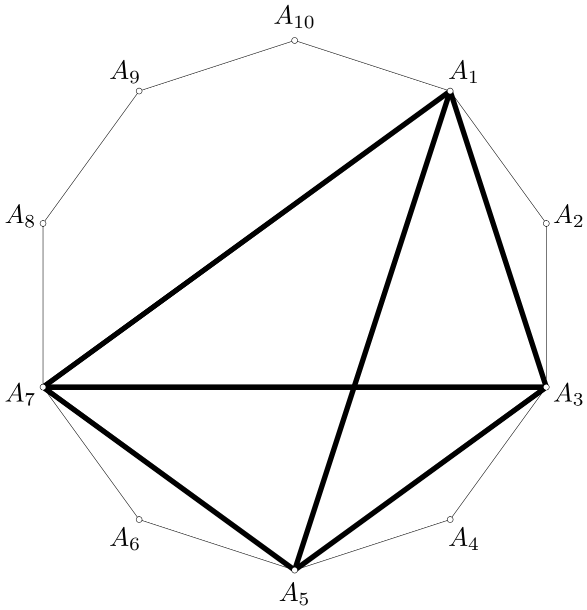
rys. 3

Sposób II: Poprowdźmy przekątne każdego z trapezów (rys. 5 i 6). Każda z czterech przekątnych dzieli okrąg opisany na dziesięciokącie na dwa łuki stanowiące 2/5 i 3/5 okręgu. Zatem wszystkie te przekątne są równej długości. Ponadto w obu trapezach przekątne przecinają się pod takim samym kątem (o mierze 72°).

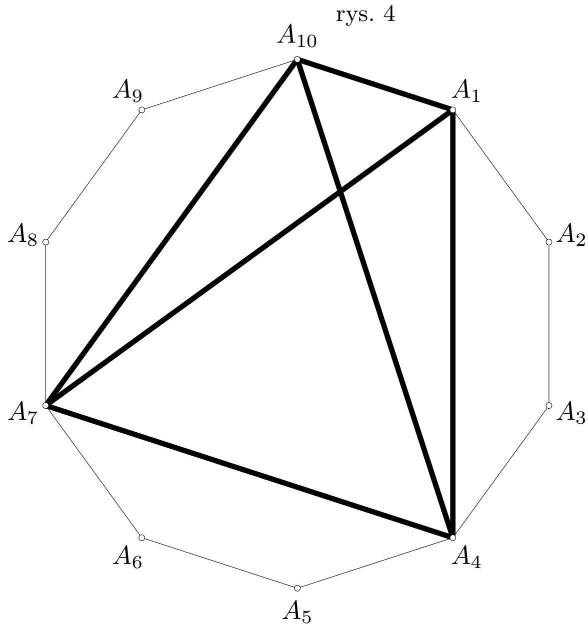
Ponieważ pole trapezu zależy tylko od długości przekątnych i kąta między nimi, pola obu trapezów są równe.



rys. 4



rys. 5



rys. 6