Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO
TRAPEZ
Nr 68 (28/2016)
Piątek, 15 lipca 2016 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **517**, **518**, **519** i **520** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

517. Zapisz liczbę 5004 używając cyfr 2, 7 i 9 (każdej tylko raz).

518. Zapisz liczbę 5054 używając cyfr 2, 7 i 9 (każdej tylko raz).

519. Zapisz liczbę 5104 używając cyfr 2, 7 i 9 (każdej tylko raz).

520. Zapisz liczbę 5184 używając cyfr 2, 7 i 9 (każdej tylko raz).

Wielokąty foremne

521. Pewne 43 wierzchołki 63-kąta foremnego pomalowano na czerwono. Udowodnij, że istnieje trójkąt równoboczny o czerwonych wierzchołkach.

522. Pewne 33 wierzchołki 63-kąta foremnego pomalowano na czerwono. Udowodnij, że istnieje trójkąt równoramienny o czerwonych wierzchołkach.

523. Pewne 23 wierzchołki 63-kąta foremnego pomalowano na czerwono. Udowodnij, że istnieje trójkąt o czerwonych wierzchołkach mający co najmniej jeden kąt miary 60°.

Rozwiązania zadań 511–516

511. $77=12\cdot 3!+5$ **512.** $81=\sqrt{\sqrt{\sqrt{3^{2^5}}}}$ **513.** $82=\dfrac{5!}{3}+7\cdot 3!$

514. Tak, przykładami wielokątów foremnych, których liczba przekątnych jest kwadratem liczby całkowitej są: **27**-kąt z $27\cdot 24/2=\mathbf{18^2}$ przekątnymi, **150**-kąt z $150\cdot 147/2=\mathbf{105^2}$ przekątnymi, **867**-kąt z $867\cdot 864/2=\mathbf{612^2}$ przekątnymi.

515. Tak, liczba przekątnych dziewięciokąta foremnego jest sześcianem liczby całkowitej, mamy bowiem $9\cdot(9-3)/2=27=3^3$.

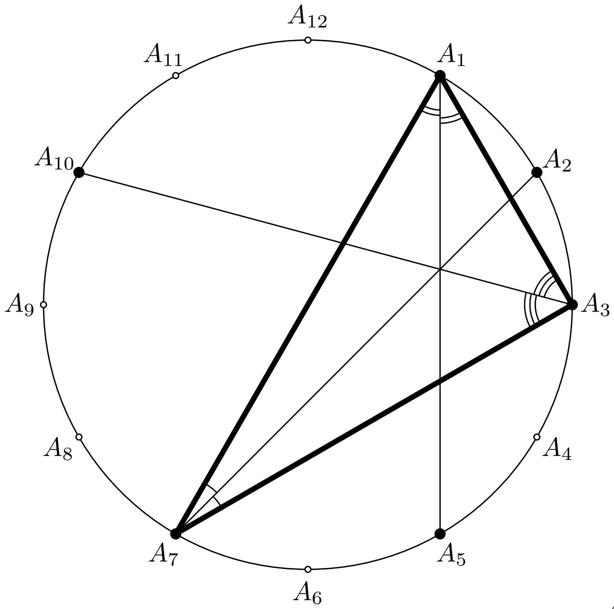
516. *Sposób I:* Niech prosta p będzie symetralną boku A_2A_3. Wówczas przekątne A_2A_7 i A_3A_{10} są symetryczne względem prostej p. Także przekątne A_1A_5 i A_4A_{12} są symetryczne względem prostej p. Dla rozwiązania zadania wystarczy więc wykazać, że przekątne A_1A_5, A_2A_7 i A_3A_{10} przecinają się w jednym punkcie.

Rozważmy trójkąt $A_1A_3A_7$ (rys. 1). Wówczas przekątne A_1A_5, A_2A_7 i A_3A_{10} są dwusiecznymi kątów tego trójkąta, a zatem przecinają się w jednym punkcie.

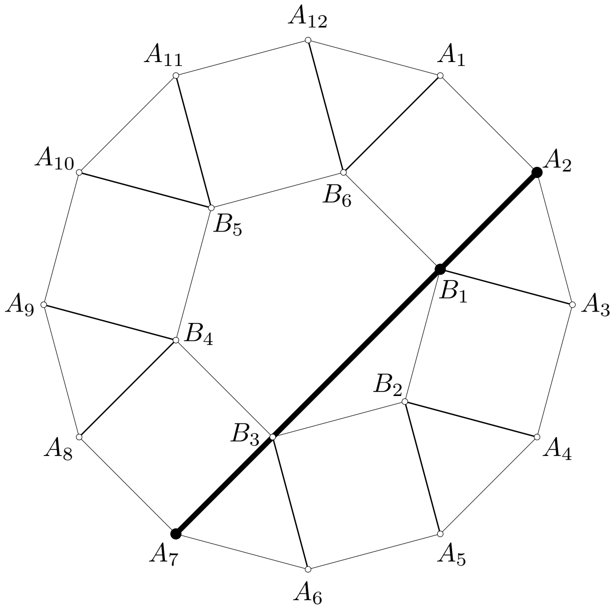
Sposób II: Przedstawmy dany dwunastokąt jako sześciokąt foremny $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ obudowany kwadratami i trójkątami równobocznymi (rys. 2). Wykażemy, że każda z przekątnych A_1A_5, A_2A_7, A_3A_{10} i A_4A_{12} przechodzi przez punkt B_1.

Na rys. 2 łatwo widać, że w punkt B_1 leży na odcinku A_2A_7 i analogicznie leży on także na odcinku A_3A_{10}.

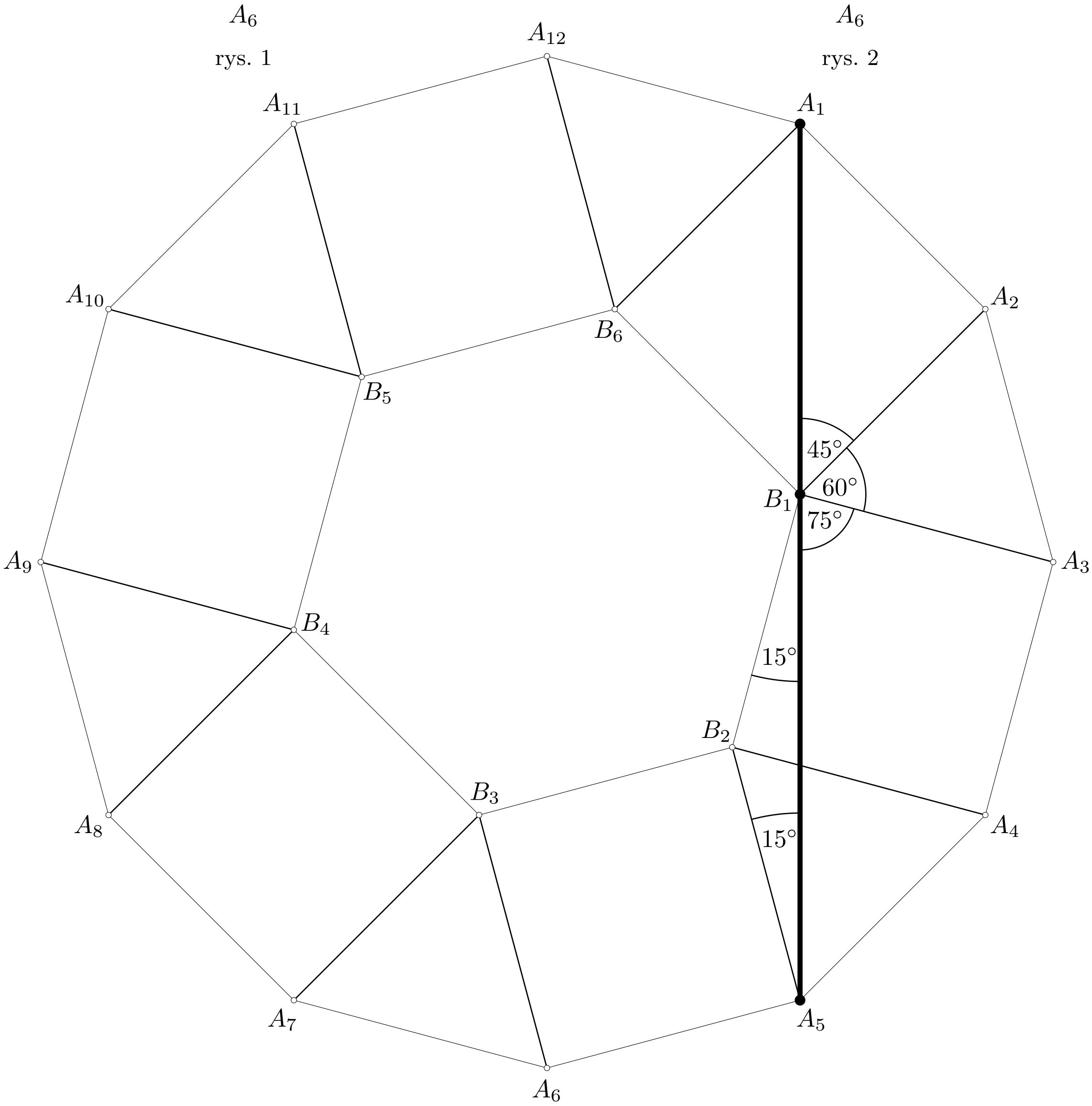
Rozważmy teraz odcinki A_1B_1 i B_1A_5 (rys. 3). Wobec $B_1B_2=B_2A_5$, trójkąt $B_1B_2A_5$ jest równoramienny, a ponieważ kąt przy wierzchołku B_2 ma miarę $90°+60°=150°$, pozostałe dwa kąty tego trójkąta mają po 15°. To pozwala wyznaczyć miary trzech kątów o wierzchołku B_1 leżacych na prawo od B_1 i składających się na kąt $\sphericalangle A_1B_1A_5$ jak na rys. 3. Ponieważ $\sphericalangle A_1B_1A_5=180°$, punkt B_1 leży na odcinku A_1A_5. Rozumując analogicznie lub powołując się na odpowiednią symetrię wnioskujemy, że punkt B_1 leży na odcinku A_4A_{12}.



rys. 1



rys. 2



rys. 3