Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO
TRAPEZ
Nr 69 (29/2016)
Piątek, 22 lipca 2016 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **524**, **525** i **526** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

524. Zapisz liczbę 136 używając cyfr 2, 5 i 8 (każdej tylko raz). Podaj dwa istotnie różne rozwiązania.

525. Zapisz liczbę 136 używając cyfr 3, 5 i 8 (każdej tylko raz).

526. Zapisz liczbę 136 używając cyfr 2, 7 i 8 (każdej tylko raz).

Wielokąty foremne

527. Dla których liczb naturalnych $n \geqslant 5$, spośród wierzchołków n-kąta foremnego można wybrać takich pięć wierzchołków, że pięciokąt przez nie wyznaczony ma wszystkie boki równej długości?

528. Dla których liczb naturalnych $n \geqslant 6$, spośród wierzchołków n-kąta foremnego można wybrać takich sześć wierzchołków, że sześciokąt przez nie wyznaczony jest równokątny?

529. Dla których liczb naturalnych $n \geqslant 7$, spośród wierzchołków n-kąta foremnego można wybrać takich siedem wierzchołków, że siedmiokąt przez nie wyznaczony ma boki parami różnej długości?

530. W trójkącie ABC kąty przy wierzchołkach A, B, C mają odpowiednio miary 36°, 108° i 36° (rys. 1 na drugiej stronie). Punkt D jest punktem przecięcia dwusiecznej kąta przy wierzchołku A z bokiem BC. Punkt E jest takim punktem leżącym na boku AC, że proste AB i DE są równoległe. Wyznacz miarę kąta $\sphericalangle ABE$.

Rozwiązania zadań 517–523

517. $5004 = 7! - \left(\left(\sqrt{9}\right)!\right)^2$

518. $5054 = \left(\left(\left(\sqrt{9}\right)!\right)! + 2\right) \cdot 7$

519. $5104 = 7! + 2^{\left(\sqrt{9}\right)!}$

520. $5184 = \left(\dfrac{9!}{7!}\right)^2$

521. Pogrupujmy wierzchołki 63-kąta w 21 trójek wyznaczających trójkąty równoboczne. Ponieważ wierzchołków czerwonych jest więcej niż $42 = 2 \cdot 21$, co najmniej jedna trójka zawiera trzy wierzchołki czerwone.

Uwaga: Liczby 43 nie można zastąpić mniejszą, co pokazuje przykład pokolorowania 42 kolejnych wierzchołków 63-kąta.

522. *Sposób I:* Wyróżnijmy jeden wierzchołek czerwony, a pozostałe 62 wierzchołki 63-kąta połączmy w pary wierzchołków symetrycznych względem prostej przechodzącej przez wyróżniony wierzchołek i przez środek okręgu opianego na 63-kącie. Ponieważ par jest 31, a zawierają one 32 wierzchołki czerwone, co najmniej jedna para składa się z dwóch wierzchołków czerwonych. Wówczas wierzchołki tej pary wraz z wyróżnionym na początku wierzchołkiem wyznaczają trójkąt równoramienny o czerwonych wierzchołkach.

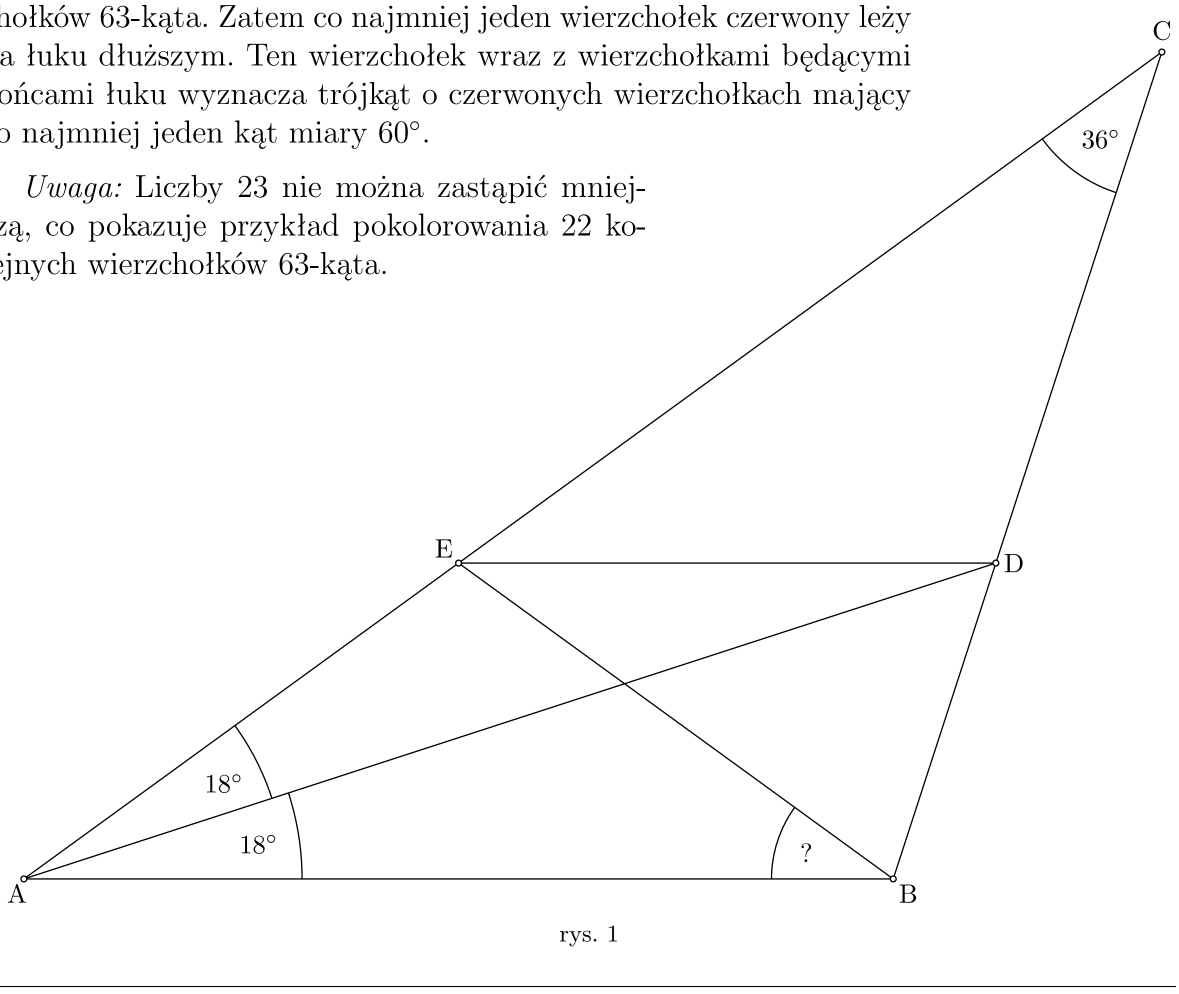
Sposób II: Udowodnimy wzmocnioną tezę zadania, w której zamiast 33 pokolorowano tylko 28 wierzchołków.

Pogrupujmy wierzchołki 63-kąta w 9 siódemek wyznaczających siedmiokąty foremne. Wówczas co najmniej jedna z tych siódemek zawiera co najmniej cztery czerwone punkty. Dla zakończenia rozwiązania wystarczy wykazać, że wśród dowolnych czterech wierzchołków siedmiokąta foremnego istnieją trzy będące wierzchołkami trójkąta równoramiennego.

Niech $B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7$ będzie siedmiokątem foremnym, w którym wyróżniono pewne cztery wierzchołki — wykażemy, że pewne trzy z nich wyznaczają trójkąt równoramienny. Wśród wyróżnionych wierzchołków muszą istnieć dwa sąsiednie wierzchołki siedmiokąta — bez straty ogólności możemy przyjąć, że są to B_1 i B_2. Zauważmy, że trójkąty $B_1B_2B_3$, $B_1B_2B_5$ i $B_1B_2B_7$ są równoramienne, skąd wynika, że wystarczy rozważyć sytuację, w której żaden z wierzchołków B_3, B_5 i B_7 nie został wyróżniony. Jednak wówczas wyróżnione muszą być pozostałe dwa wierzchołki, czyli B_4 i B_6, co prowadzi do trójkąta równoramiennego $B_2B_4B_6$.

523. Pogrupujmy wierzchołki 63-kąta w 21 trójek wyznaczających trójkąty równoboczne. Ponieważ wierzchołków czerwonych jest więcej niż trójek, co najmniej jedna trójka zawiera co najmniej dwa wierzchołki czerwone. Wierzchołki te dzielą okrąg opisany na 63-kącie na dwa łuki stanowiące 1/3 i 2/3 okręgu. Na krótszym łuku, oprócz rozpatrywanych dwóch wierzchołków czerwonych stanowiących jego końce, leży 20 wierzchołków 63-kąta. Zatem co najmniej jeden wierzchołek czerwony leży na łuku dłuższym. Ten wierzchołek wraz z wierzchołkami będącymi końcami łuku wyznacza trójkąt o czerwonych wierzchołkach mający co najmniej jeden kąt miary 60°.

Uwaga: Liczby 23 nie można zastąpić mniejszą, co pokazuje przykład pokolorowania 22 kolejnych wierzchołków 63-kąta.



rys. 1