Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO
TRAPEZ
Nr 70 (30/2016)
Piątek, 29 lipca 2016 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **531**, **532** i **533** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

531. Zapisz liczbę 4912 używając cyfr 1, 2, 6 i 7 (każdej tylko raz).

532. Zapisz liczbę 4914 używając cyfr 1, 2, 6 i 7 (każdej tylko raz).

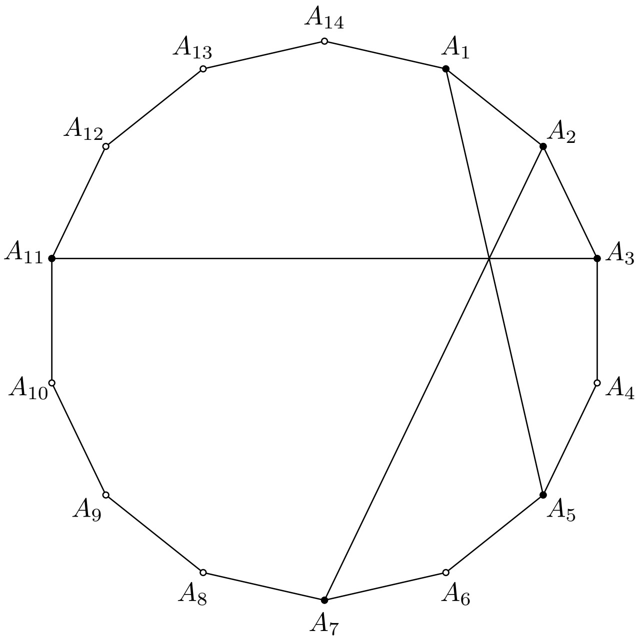
533. Zapisz liczbę 4915 używając cyfr 1, 2, 6 i 7 (każdej tylko raz).

Wielokąty foremne

534. Dla których liczb naturalnych $n \geqslant 5$, spośród wierzchołków n-kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu 1 można wybrać takich pięć wierzchołków, że pięciokąt przez nie wyznaczony ma wszystkie boki dłuższe od 1?

535. Dla których liczb naturalnych $n \geqslant 6$, spośród wierzchołków n-kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu 1 można wybrać takich sześć wierzchołków, że sześciokąt przez nie wyznaczony ma wszystkie boki dłuższe od 1?

536. Udowodnij, że w czternastokącie foremnym $A_1A_2A_3\ldots A_{14}$ przekątne A_1A_5, A_2A_7 i A_3A_{11} przecinają się w jednym punkcie (rys. 1).



rys. 1

Rozwiązania zadań 524–530

524. $136 = 5! + 2\cdot 8 = 2^8 - 5!$ **525.** $136 = \dfrac{(3!)!}{5} - 8$ **526.** $136 = 2^7 + 8$

527. Taki wybór jest możliwy wtedy i tylko wtedy, gdy liczba n jest podzielna przez 5, gdyż tylko wtedy można wybrać pięć wierzchołków n-kąta foremnego dzielących okrąg opisany na tym n-kącie na pięć łuków równej długości.

Odpowiedź: Warunki zadania spełniają liczby $n \geqslant 5$ podzielne przez 5.

Uwaga: Łatwo uogólnić tezę zadania do następującej postaci:
Spośród wierzchołków n-kąta formenego można wybrać k wierzchołków wyznaczających k-kąt foremny wtedy i tylko wtedy, gdy n jest podzielne przez k.

Zauważmy przy tym, że w przypadku wielokąta wpisanego w okrąg równoboczność jest równoważna foremności.

528. Sześciokąt o wybranych wierzchołkach jest wpisany w okrąg, a mianowicie w okrąg opisany na wyjściowym n-kącie foremnym. Skorzystamy z następującej charakteryzacji wielokątów równokątnych wpisanych w okrąg: Wielokąt wpisany w okrąg jest równokątny wtedy i tylko wtedy, gdy ma co drugi bok takiej samej długości (w przypadku nieparzystej liczby boków to wymusza równość długości wszystkich boków, czyli foremność wielokąta, natomiast w przypadku parzystej liczby boków mogą na przemian występować dwie różne długości boków).

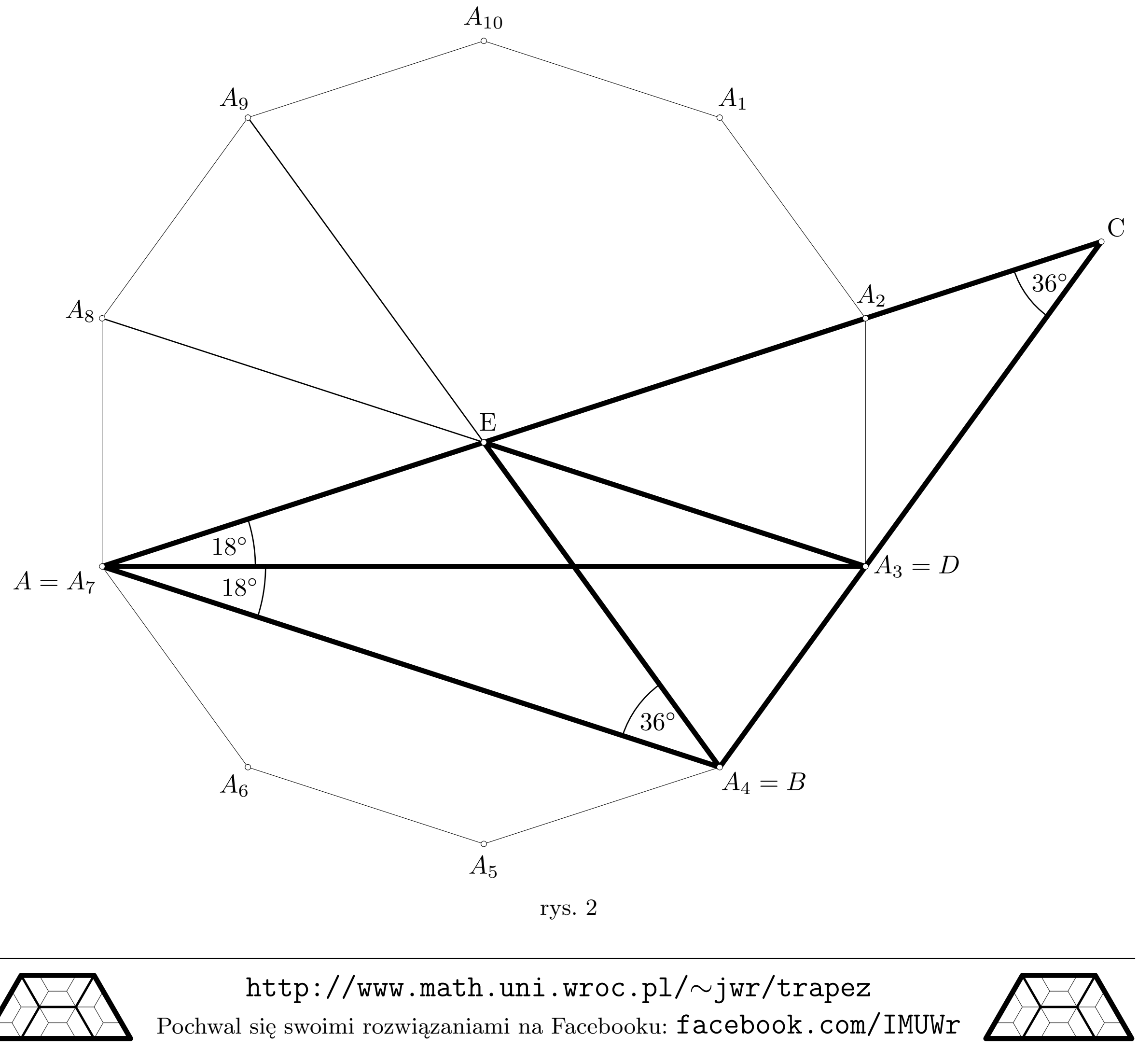
W przypadku sześciokąta $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ wpisanego w okrąg równoboczność jest równoważna temu, że trójkąty $A_1A_3A_5$ i $A_2A_4A_6$ wyznaczone przez co drugi wierzchołek sześciokąta są równoboczne. Natomiast wybór trójki wierzchołków n-kąta foremnego wyznaczających trójkąt równoboczny jest możliwy wtedy i tylko wtedy, gdy n jest podzielne przez 3.

Odpowiedź: Warunki zadania spełniają liczby $n \geqslant 6$ podzielne przez 3.

529. Siedmiokąt wyznaczony przez wybrane wierzchołki ma boki różnej długości wtedy i tylko wtedy, gdy jego wierzchołki dzielą okrąg opisany na danym n-kącie foremnym na łuki różnej długości. Ponieważ każdy łuk jest wielokrotnością $1/n$-tej okręgu, możliwie najkrótszych sześć różnych łuków ma długości (wyrażone jako ułamek okręgu): $1/n$, $2/n$, $3/n$, $4/n$, $5/n$ i $6/n$, a na siódmy łuk pozostaje $(n-21)/n$ okręgu. Siódmy łuk ma długość różną od pierwszych sześciu wtedy i tylko wtedy, gdy $n-21 \geqslant 7$, czyli $n \geqslant 28$.

Odpowiedź: Warunki zadania spełniają liczby $n \geqslant 28$.

530. Rozważmy dziesięciokąt foremny $A_1A_2A_3 \ldots A_{10}$. Wówczas daną w treści zadania konfigurację można dopasować do rysunku dziesięciokąta i niektórych odcinków przez niego wyznaczonych jak na rys. 2. Stąd wniosek, że kąt $\sphericalangle ABE$ ma miarę $36°$.



rys. 2