Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 71 (31/2016)
Piątek, 5 sierpnia 2016 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **537**, **538** i **539** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

537. Zapisz liczbę 51 używając cyfr 3, 3 i 4.

538. Zapisz liczbę 53 używając cyfr 1, 2, 3 i 8 (każdej tylko raz).

539. Zapisz liczbę 89 używając cyfr 0, 2, 4 i 7 (każdej tylko raz).

Wielokąty foremne

540. Dany jest 13-kąt foremny $A_1A_2A_3\ldots A_{13}$. Uporządkuj następujące trójkąty rosnąco ze względu na pole: $A_1A_4A_8$, $A_1A_6A_8$, $A_1A_8A_{10}$, $A_1A_6A_{10}$, $A_1A_6A_{13}$, $A_1A_6A_{11}$.

541. Dla których liczb naturalnych $n\geqslant 7$, spośród wierzchołków n-kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu 1 można wybrać takich siedem wierzchołków, że siedmiokąt przez nie wyznaczony ma wszystkie boki krótsze od 1?

542. Dla których liczb naturalnych $n\geqslant 6$, spośród wierzchołków n-kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu 1 można wybrać takich sześć wierzchołków, że sześciokąt przez nie wyznaczony ma wszystkie boki krótsze od 1?

Rozwiązania zadań 531–536

531. $4912=7!-2^{6+1}$ **532.** $4914=7!-126$ **533.** $4915=\sqrt{17^6}+2$

534. Cięciwa okręgu ma długość równą promieniowi tego okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy jej końce dzielą okrąg na łuki stanowiące 1/6 i 5/6 okręgu. Wobec tego cięciwa ma długość większą od promienia, gdy jej końce dzielą okrąg na dwa łuki dłuższe niż 1/6 okręgu.

Warunki zadania są więc spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy można wybrać pięć wierzchołków n-kąta foremnego dzielących okrąg opisany na n-kącie na łuki długości większej niż 1/6 okręgu. A to z kolei jest równoważne istnieniu liczb całkowitych dodatnich a_1, a_2, a_3, a_4 i a_5 spełniających warunki

$$\frac{n}{6}<a_1\leqslant a_2\leqslant a_3\leqslant a_4\leqslant a_5 \qquad \text{oraz} \qquad a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=n\,, \tag{1}$$

co łatwo widać, jeśli wyobrazimy sobie, że okrąg ma być podzielony na łuki stanowiące a_1/n, a_2/n, a_3/n, a_4/n oraz a_5/n okręgu.

Ponieważ nierówność $\frac{n}{6}<a_1$ jest równoważna nierówności $\left[\frac{n}{6}\right]+1\leqslant a_1$, istnienie liczb a_1, a_2, a_3, a_4 i a_5 spełniających warunki (1) jest równoważne nierówności

$$5\cdot\left(\left[\frac{n}{6}\right]+1\right)\leqslant n\,, \tag{2}$$

gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x.

Oznaczając $k=\left[\frac{n}{6}\right]$, co jest równoważne nierównościom

$$6k\leqslant n\leqslant 6k+5\,, \tag{3}$$

przepisujemy nierówność (2) w postaci

$$5k+5\leqslant n\,. \tag{4}$$

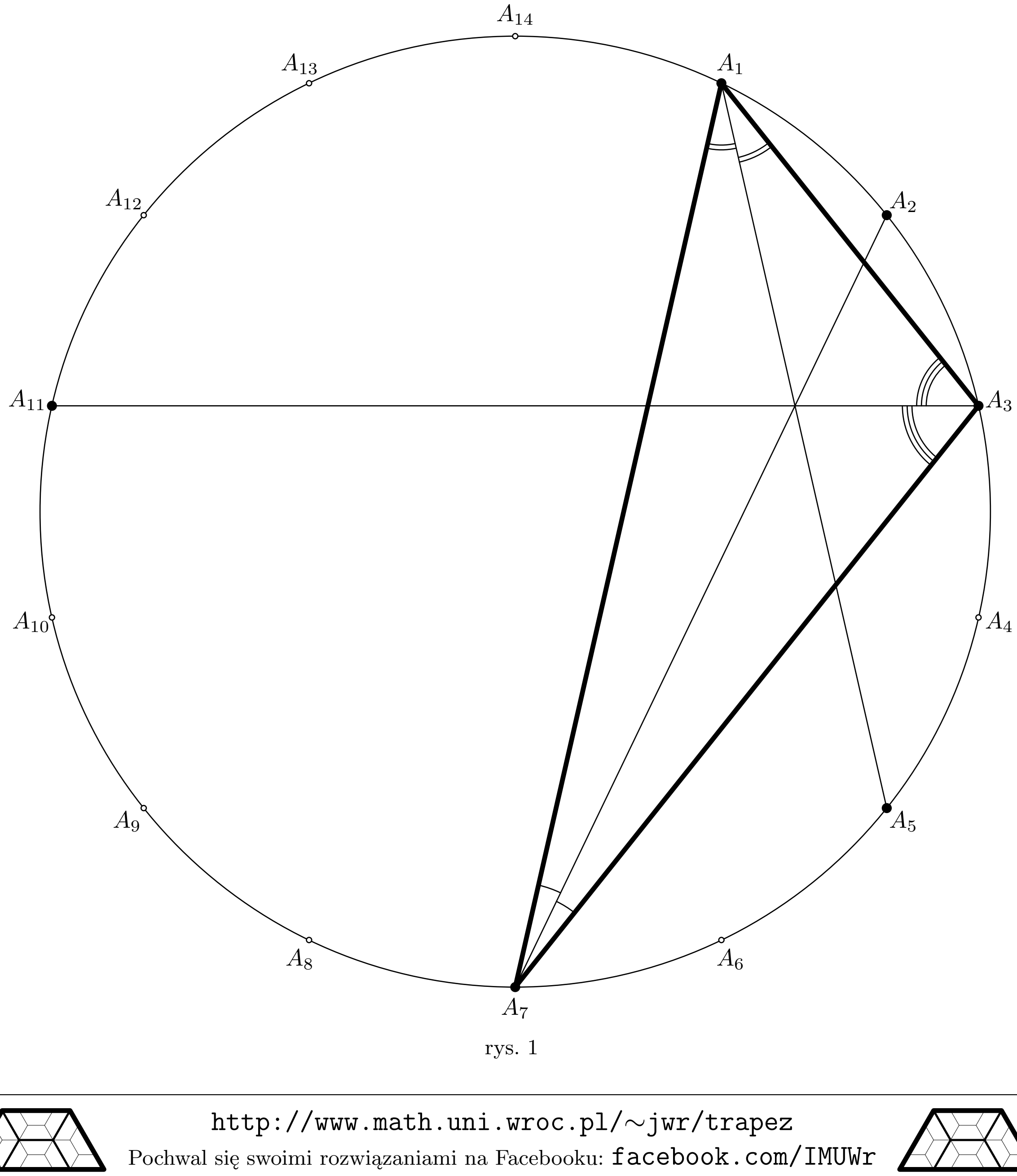
Uwzględnienie prawej nierówności (3) wraz z nierównością (4) dla kolejnych liczb całkowitych nieujemnych k prowadzi do podanej niżej odpowiedzi.

Odpowiedź: Warunki zadania są spełnione przez następujące liczby naturalne n: 5, 10, 11, 15, 16, 17, 20, 21, 22, 23 oraz wszystkie liczby $n \geqslant 25$.

535. Dla dowolnych sześciu punktów leżących na okręgu opisanym na n-kącie foremnym najkrótszy z łuków, na które punkty te dzielą okrąg, ma długość nie większą niż 1/6 okręgu. W konsekwencji najkrótszy bok sześciokąta o wierzchołkach w rozważanych punktach ma długość nie większą niż promień okręgu. Stąd wniosek, że teza zadania nie jest spełniona dla żadnej liczby naturalnej $n \geqslant 6$.

Odpowiedź: Nie istnieją liczby spełniające warunki zadania.

536. Rozważmy trójkąt $A_1A_3A_7$ (rys. 1). Wówczas przekątne A_1A_5, A_2A_7 i A_3A_{11} są dwusiecznymi kątów tego trójkąta, a zatem przecinają się w jednym punkcie.



rys. 1