Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO
TRAPEZ
Nr 72 (32/2016)
Piątek, 12 sierpnia 2016 r.

Łamigłówki i zadania na długi weekend

W łamigłówkach **543**, **544** i **545** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

543. Zapisz liczbę 7680 używając cyfr 4, 5 i 6 (każdej tylko raz).

544. Zapisz liczbę 7800 używając cyfr 4, 5 i 6 (każdej tylko raz).

545. Zapisz liczbę 8000 używając cyfr 4, 5 i 6 (każdej tylko raz).

Wielokąty foremne

546. Czy istnieją takie liczby naturalne m i n większe od 3, że liczba przekątnych m-kąta foremnego jest dwa razy większa od liczby przekątnych n-kąta foremnego?

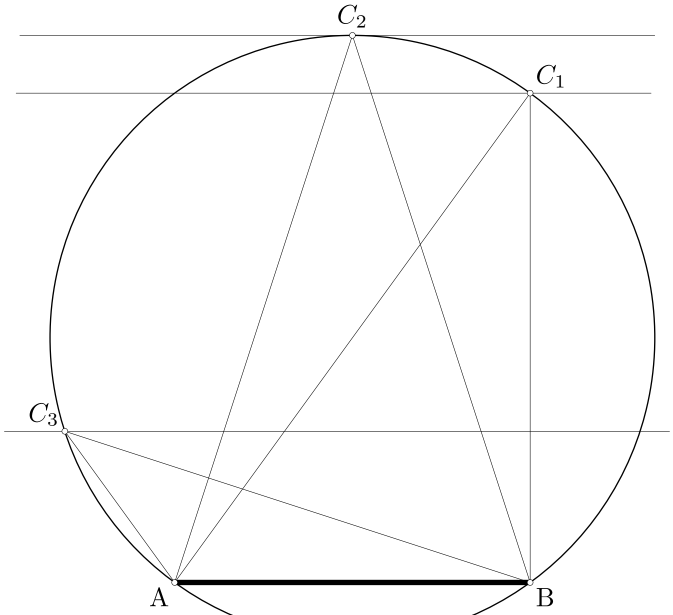
547. Czy istnieją takie liczby naturalne m i n większe od 3, że liczba przekątnych m-kąta foremnego jest trzy razy większa od liczby przekątnych n-kąta foremnego?

Rozwiązania zadań 537–542

537. $51=3^3+4!$ **538.** $53=\dfrac{8!}{(3!)!}-2-1$ **539.** $89=40+7^2$

540. Rozwiązanie zadania oprzemy na następującym lemacie:

Lemat: Niech A i B będą ustalonymi punktami leżącymi na okręgu jak na rysunku 1, a punkt C niech przebiega górny łuk AB tego okręgu. Wówczas pole trójkąta ABC jest tym większe, im mniejsza jest różnica długości łuków, na które punkt C dzieli łuk AB.



rys. 1

Dowód lematu:

Ponieważ wszystkie trójkąty ABC mają tę samą podstawę AB, ich pole jest proporcjonalne do wysokości, która jest równa odległości prostej AB od prostej równoległej do AB przechodzącej przez punkt C. A ta odległość jest tym większa, im mniejsza jest różnica długości łuków, na które punkt C dzieli górny łuk AB. W szczególności największe pole ma trójkąt równoramienny, gdzie prosta równoległa do AB przechodząca przez C jest styczna do okręgu (na rysunku 1 ten punkt C jest oznaczony przez C_2).

Przejdziemy teraz do rozwiązania zadania. Niech $P(a, b, c)$ oznacza pole trójkąta wpisanego w okrąg opisany na 13-kącie foremnym $A_1A_2A_3\ldots A_{13}$, dzielącego swoimi wierzchołkami okrąg na łuki stanowiące $a/13$, $b/13$ i $c/13$ okręgu. Przy tych oznaczeniach pola trójkątów $A_1A_4A_8$, $A_1A_6A_8$, $A_1A_8A_{10}$, $A_1A_6A_{10}$, $A_1A_6A_{13}$, $A_1A_6A_{11}$ są odpowiednio równe $P(3, 4, 6)$, $P(2, 5, 6)$, $P(2, 4, 7)$, $P(4, 4, 5)$, $P(1, 5, 7)$, $P(3, 5, 5)$.

Na mocy lematu zachodzą następujące nierówności:

$$P(1, 5, 7) < P(2, 4, 7) < P(2, 5, 6) < P(3, 4, 6) < P(3, 5, 5) < P(4, 4, 5)\,.$$

To pozwala uporządkować dane trójkąty rosnąco ze względu na pole:

$$A_1A_6A_{13},\quad A_1A_8A_{10},\quad A_1A_6A_8,\quad A_1A_4A_8,\quad A_1A_6A_{11},\quad A_1A_6A_{10}\,.$$

541. *Rozwiązanie błędne:* Cięciwa okręgu ma długość mniejszą od promienia, gdy jej końce dzielą okrąg na dwa łuki, z których jeden jest krótszy niż 1/6 okręgu.

Warunki zadania są więc spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy można wybrać siedem wierzchołków n-kąta foremnego dzielących okrąg opisany na n-kącie na łuki długości mniejszej niż 1/6 okręgu. A to z kolei jest równoważne istnieniu liczb całkowitych dodatnich a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 i a_7 spełniających warunki

$$\frac{n}{6} > a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant a_4 \geqslant a_5 \geqslant a_6 \geqslant a_7 \qquad \text{oraz} \qquad a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7 = n\,, \quad (1)$$

co łatwo widać, jeśli wyobrazimy sobie, że okrąg ma być podzielony na łuki stanowiące a_1/n, a_2/n, a_3/n, a_4/n, a_5/n, a_6/n oraz a_7/n okręgu.

Ponieważ nierówność $\frac{n}{6} > a_1$ jest równoważna nierówności $\left\lceil\frac{n}{6}\right\rceil - 1 \geqslant a_1$, istnienie liczb a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 i a_7 spełniających warunki (1) jest równoważne nierówności

$$7\cdot\left(\left\lceil\frac{n}{6}\right\rceil - 1\right) \geqslant n\,, \qquad (2)$$

gdzie $\lceil x\rceil$ oznacza zaokrąglenie liczby x w górę do najbliższej liczby całkowitej.

Oznaczając $k = \left\lceil\frac{n}{6}\right\rceil$, co jest równoważne nierównościom

$$6k \geqslant n \geqslant 6k-5\,, \qquad (3)$$

przepisujemy nierówność (2) w postaci

$$7k-7 \geqslant n\,. \qquad (4)$$

Uwzględnienie prawej nierówności (3) wraz z nierównością (4) dla kolejnych liczb naturalnych $k > 1$ prowadzi do podanej niżej odpowiedzi.

Odpowiedź: Warunki zadania są spełnione przez następujące liczby naturalne n: 7, 13, 14, 19, 20, 21, 25, 26, 27, 28, 31, 32, 33, 34, 35 oraz wszystkie liczby $n \geqslant 37$.

542. *Rozwiązanie błędne:* Dla dowolnych sześciu punktów leżących na okręgu opisanym na n-kącie foremnym najdłuższy z łuków, na które punkty te dzielą okrąg, ma długość nie mniejszą niż 1/6 okręgu. W konsekwencji najdłuższy bok sześciokąta o wierzchołkach w rozważanych punktach ma długość nie mniejszą niż promień okręgu. Stąd wniosek, że teza zadania nie jest spełniona dla żadnej liczby naturalnej $n \geqslant 6$.

Odpowiedź: Nie istnieją liczby spełniające warunki zadania.

Poprawne rozwiązania zadań **541** i **542** wraz z wyjaśnieniem błędu zostaną zamieszczone w następnym **Trapezie**.