

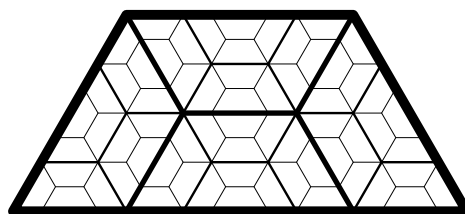
## Łamigłówki i zadania na długi weekend

W łamigłówkach 543, 544 i 545 oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

543. Zapisz liczbę 7680 używając cyfr 4, 5 i 6 (każdej tylko raz).

544. Zapisz liczbę 7800 używając cyfr 4, 5 i 6 (każdej tylko raz).

545. Zapisz liczbę 8000 używając cyfr 4, 5 i 6 (każdej tylko raz).



Autorski Tygodnik Matematyczny  
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

# TRAPEZ

## Nr 72 (32/2016)

Piątek, 12 sierpnia 2016 r.

## Wielokąty foremne

546. Czy istnieją takie liczby naturalne  $m$  i  $n$  większe od 3, że liczba przekątnych  $m$ -kąta foremnego jest dwa razy większa od liczby przekątnych  $n$ -kąta foremnego?

547. Czy istnieją takie liczby naturalne  $m$  i  $n$  większe od 3, że liczba przekątnych  $m$ -kąta foremnego jest trzy razy większa od liczby przekątnych  $n$ -kąta foremnego?

## Rozwiązania zadań 537–542

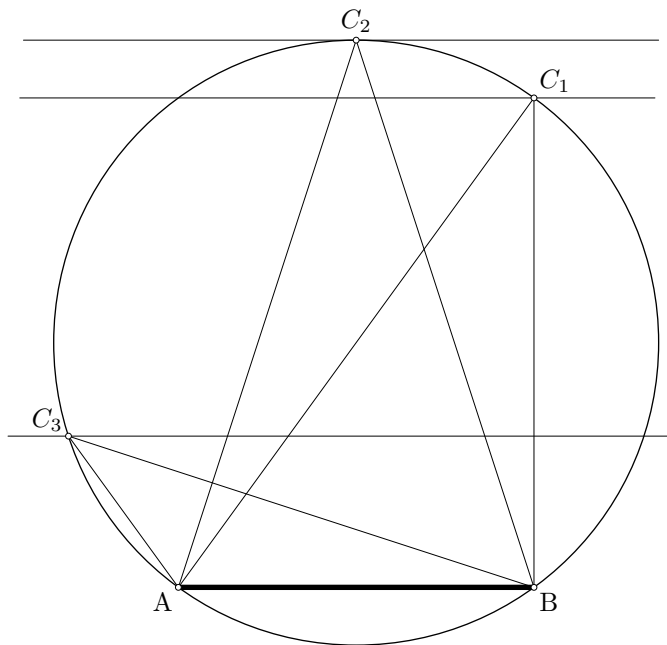
537.  $51 = 3^3 + 4!$

538.  $53 = \frac{8!}{(3!)!} - 2 - 1$

539.  $89 = 40 + 7^2$

540. Rozwiązanie zadania oprzemy na następującym lemacie:

*Lemat:* Niech  $A$  i  $B$  będą ustalonymi punktami leżącymi na okręgu jak na rysunku 1, a punkt  $C$  niech przebiega górny łuk  $AB$  tego okręgu. Wówczas pole trójkąta  $ABC$  jest tym większe, im mniejsza jest różnica długości łuków, na które punkt  $C$  dzieli łuk  $AB$ .



rys. 1

*Dowód lematu:*

Ponieważ wszystkie trójkąty  $ABC$  mają tę samą podstawę  $AB$ , ich pole jest proporcjonalne do wysokości, która jest równa odległości prostej  $AB$  od prostej równoległej do  $AB$  przechodzącej przez punkt  $C$ . A ta odległość jest tym większa, im mniejsza jest różnica długości łuków, na które punkt  $C$  dzieli górny łuk  $AB$ . W szczególności największe pole ma trójkąt równoramienny, gdzie prosta równoległa do  $AB$  przechodząca przez  $C$  jest styczna do okręgu (na rysunku 1 ten punkt  $C$  jest oznaczony przez  $C_2$ ).



Przejdziemy teraz do rozwiązania zadania. Niech  $P(a, b, c)$  oznacza pole trójkąta wpisanego w okrąg opisany na 13-kącie foremnym  $A_1A_2A_3\dots A_{13}$ , dzielącego swoimi wierzchołkami okrąg na łuki stanowiące  $a/13$ ,  $b/13$  i  $c/13$  okręgu. Przy tych oznaczeniach pola trójkątów  $A_1A_4A_8$ ,  $A_1A_6A_8$ ,  $A_1A_8A_{10}$ ,  $A_1A_6A_{10}$ ,  $A_1A_6A_{13}$ ,  $A_1A_6A_{11}$  są odpowiednio równe  $P(3, 4, 6)$ ,  $P(2, 5, 6)$ ,  $P(2, 4, 7)$ ,  $P(4, 4, 5)$ ,  $P(1, 5, 7)$ ,  $P(3, 5, 5)$ .

Na mocy lematu zachodzą następujące nierówności:

$$P(1, 5, 7) < P(2, 4, 7) < P(2, 5, 6) < P(3, 4, 6) < P(3, 5, 5) < P(4, 4, 5).$$

To pozwala uporządkować dane trójkąty rosnąco ze względu na pole:

$$A_1A_6A_{13}, \quad A_1A_8A_{10}, \quad A_1A_6A_8, \quad A_1A_4A_8, \quad A_1A_6A_{11}, \quad A_1A_6A_{10}.$$

**541. Rozwiązanie błędne:** Cięciwa okręgu ma długość mniejszą od promienia, gdy jej końce dzielą okrąg na dwa łuki, z których jeden jest krótszy niż  $1/6$  okręgu.

Warunki zadania są więc spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy można wybrać siedem wierzchołków  $n$ -kąta foremnego dzielących okrąg opisany na  $n$ -kącie na łuki długości mniejszej niż  $1/6$  okręgu. A to z kolei jest równoważne istnieniu liczb całkowitych dodatnich  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$  i  $a_7$  spełniających warunki

$$\frac{n}{6} > a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq a_5 \geq a_6 \geq a_7 \quad \text{oraz} \quad a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = n, \quad (1)$$

co łatwo widać, jeśli wyobrazimy sobie, że okrąg ma być podzielony na łuki stanowiące  $a_1/n, a_2/n, a_3/n, a_4/n, a_5/n, a_6/n$  oraz  $a_7/n$  okręgu.

Ponieważ nierówność  $\frac{n}{6} > a_1$  jest równoważna nierówności  $\left\lceil \frac{n}{6} \right\rceil - 1 \geq a_1$ , istnienie liczb  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$  i  $a_7$  spełniających warunki (1) jest równoważne nierówności

$$7 \cdot \left( \left\lceil \frac{n}{6} \right\rceil - 1 \right) \geq n, \quad (2)$$

gdzie  $\lceil x \rceil$  oznacza zaokrąglenie liczby  $x$  w górę do najbliższej liczby całkowitej.

Oznaczając  $k = \left\lceil \frac{n}{6} \right\rceil$ , co jest równoważne nierównościom

$$6k \geq n \geq 6k - 5, \quad (3)$$

przepisujemy nierówność (2) w postaci

$$7k - 7 \geq n. \quad (4)$$

Uwzględnienie prawej nierówności (3) wraz z nierównością (4) dla kolejnych liczb naturalnych  $k > 1$  prowadzi do podanej niżej odpowiedzi.

*Odpowiedź:* Warunki zadania są spełnione przez następujące liczby naturalne  $n$ : 7, 13, 14, 19, 20, 21, 25, 26, 27, 28, 31, 32, 33, 34, 35 oraz wszystkie liczby  $n \geq 37$ .

**542. Rozwiązanie błędne:** Dla dowolnych sześciu punktów leżących na okręgu opisanym na  $n$ -kącie foremnym najdłuższy z łuków, na które punkty te dzielą okrąg, ma długość nie mniejszą niż  $1/6$  okręgu. W konsekwencji najdłuższy bok sześciokąta o wierzchołkach w rozważanych punktach ma długość nie mniejszą niż promień okręgu. Stąd wniosek, że teza zadania nie jest spełniona dla żadnej liczby naturalnej  $n \geq 6$ .

*Odpowiedź:* Nie istnieją liczby spełniające warunki zadania.

Poprawne rozwiązania zadań **541** i **542** wraz z wyjaśnieniem błędu zostaną zamieszczone w następnym **Trapezie**.

