Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO
TRAPEZ
Nr 73 (33/2016)
Piątek, 19 sierpnia 2016 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **548**, **549**, **550** i **551** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

548. Zapisz liczbę 399 używając cyfr 4, 5, 6 i 7 (każdej tylko raz).

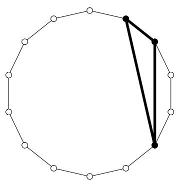
549. Zapisz liczbę 401 używając cyfr 4, 5, 6 i 7 (każdej tylko raz).

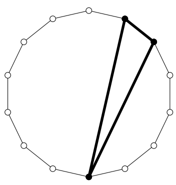
550. Zapisz liczbę 402 używając cyfr 4, 5, 6 i 7 (każdej tylko raz).

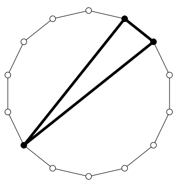
551. Zapisz liczbę 403 używając cyfr 4, 5, 6 i 7 (każdej tylko raz).

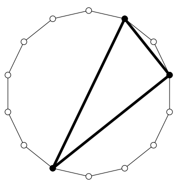
Wielokąty foremne

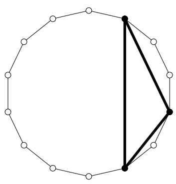
552. Dany jest 14-kąt foremny $A_1A_2A_3\ldots A_{14}$. Połącz następujące trójkąty w pary trójkątów o ilorazie pól równym 2: $A_1A_2A_5$, $A_1A_2A_7$, $A_1A_2A_9$, $A_1A_3A_8$, $A_1A_4A_6$, $A_1A_5A_8$ (przedstawione odpowiednio na rys. 1–6).

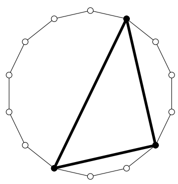

rys. 1


rys. 2


rys. 3


rys. 4


rys. 5


rys. 6

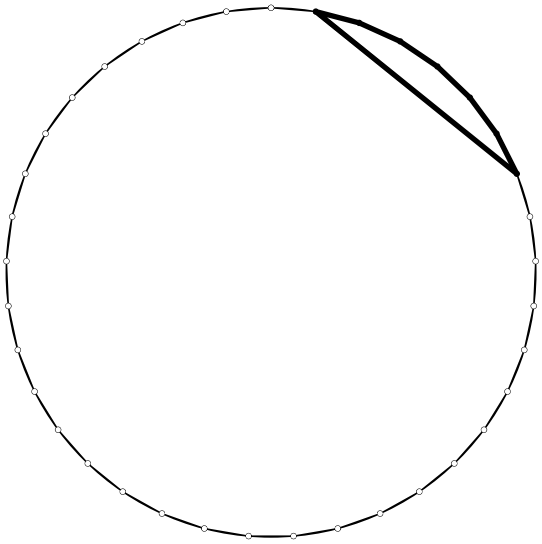
Rozwiązania zadań 541–547

541. *Rozwiązanie poprawne:* Nie jest prawdą, że jeżeli jeden z łuków, na które siedem wybranych punktów dzieli okrąg, jest dłuższy od 1/6 okręgu, to odpowiadający mu bok siedmiokąta ma długość większą od promienia okręgu. Jeśli bowiem łuk ten jest bardzo długi, a mianowicie dłuższy od 5/6 okręgu, to odpowiadający mu bok jest krótszy od promienia okręgu.

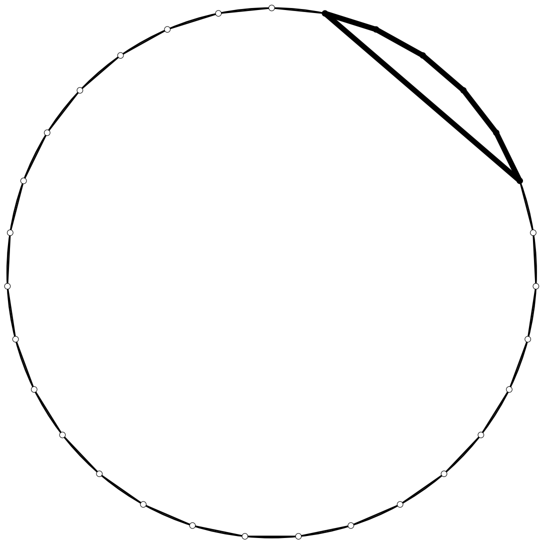
W konsekwencji warunki zadania spełniają również liczby n, dla których spośród wierzchołków n-kąta foremnego można wybrać takich siedem, aby najdłuższy spośród łuków, na które dzielą one okrąg opisany na siedmiokącie, był dłuższy od 5/6 okręgu. Aby zmaksymalizować długość najdłuższego łuku, należy zminimalizować długości pozostałych łuków, czyli wybrać siedem kolejnych wierzchołków n-kąta foremnego (rys. 7). Wówczas najdłuższy łuk stanowi $(n-6)/n$ okręgu, co jest większe od 5/6 okręgu dla $n \geqslant 37$.

Otrzymaliśmy więc zupełnie inną konfigurację punktów niż w podanym wcześniej rozwiązaniu. Rozwiązanie to było błędne, gdyż nie uwzględniało możliwości wyboru punktów w opisany wyżej sposób. Jednak ostateczna odpowiedź była poprawna, gdyż dla $n \geqslant 37$ i tak wykazaliśmy istnienie siedmiokąta spełniającego warunki zadania.

542. *Rozwiązanie poprawne:* Błąd w przedstawionym rozwiązaniu jest analogiczny jak w zadaniu poprzednim i polega na nierozważeniu przypadku, w którym jeden z łuków, na które wybrane wierzchołki dzielą okrąg opisany na n-kącie foremnym, jest bardzo długi.



rys. 7



rys. 8

W konsekwencji należy rozpatrzyć możliwość wyboru sześciu kolejnych wierzchołków n-kąta foremnego (rys. 8), co spełnia warunki podane w zadaniu dla $n \geqslant 31$.

Poprawna odpowiedź: Warunki zadania są spełnione przez liczby naturalne $n \geqslant 31$.

543. $7680 = 5! \cdot 64$ **544.** $7800 = 6^5 + 4!$ **545.** $8000 = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\left(\frac{5!}{6}\right)^{4!}}}} = \sqrt{(4 \cdot 5)^6}$

546. Zgodnie ze wzorem na liczbę przekątnych wielokąta wypukłego warunek podany w treści zadania sprowadza się do równości

$$\frac{m \cdot (m-3)}{2} = 2 \cdot \frac{n \cdot (n-3)}{2},$$

czyli

$$m \cdot (m-3) = 2 \cdot n \cdot (n-3).$$

Poszukując rozwiązań powyższego równania natrafiamy na następujące przykłady:
$(m, n) = (12, 9)$ — dwunastokąt ma 54 przekątne, a dziewięciokąt 27,
$(m, n) = (63, 45)$ — 63-kąt ma 1890 przekątnych, a 45-kąt 945.

Uwaga: Można udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele par liczb (m, n) spełniających warunki zadania.

547. Warunek podany w treści zadania sprowadza się do równości

$$m \cdot (m-3) = 3 \cdot n \cdot (n-3).$$

Poszukując rozwiązań powyższego równania natrafiamy na następujące przykłady:
$(m, n) = (9, 6)$ — dziewięciokąt ma 27 przekątnych, a sześciokąt 9,
$(m, n) = (30, 18)$ — 30-kąt ma 405 przekątnych, a 18-kąt 135.

Uwaga: Można udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele par liczb (m, n) spełniających warunki zadania.