Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **558**, **559** i **560** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

558. Zapisz liczbę 207 używając cyfr 1, 3, 4 i 5 (każdej tylko raz).

559. Zapisz liczbę 208 używając cyfr 1, 3, 4 i 5 (każdej tylko raz). Podaj dwa istotnie różne rozwiązania.

560. Zapisz liczbę 209 używając cyfr 1, 3, 4 i 5 (każdej tylko raz).

Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 75 (35/2016)

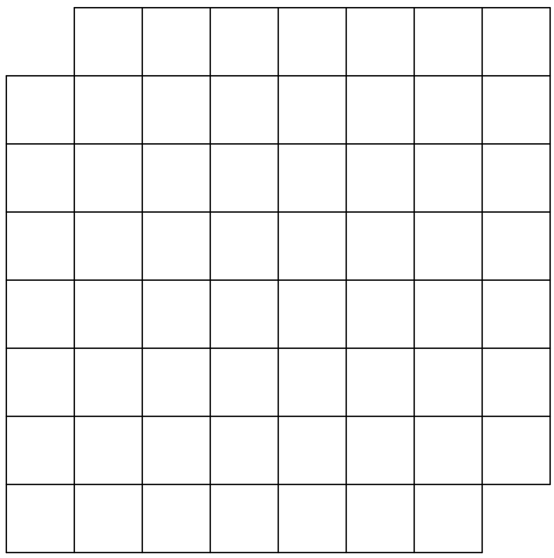
Piątek, 2 września 2016 r.

Kolorowania, numerowania i podziały figur

561. Udowodnij, że szachownicy o wymiarach 8×8 z usuniętymi przeciwległymi polami narożnymi (rys. 1) nie można pokryć kostkami domina (czyli prostokątami o wymiarach 1×2).

Rozwiąż zadanie dwoma istotnie różnymi sposobami.

Obowiązują standardowe założenia: kostki nie mogą na siebie zachodzić ani wystawać poza pokrywaną figurę.



rys. 1

Rozwiązania zadań 553–557

553. $8085=\dfrac{8!}{5}+21$ **554.** $8100=\left(\dfrac{(5+1)!}{8}\right)^2$ **555.** $8191=2^{5+8}-1$

556. Interesują nas pary liczb m, n większych od 3 spełniające równanie

$$m\cdot(m-3)=4\cdot n\cdot(n-3)\,.$$

Przekształcanie powyższego równania prowadzi kolejno do:

$$4\cdot m\cdot(m-3)=16\cdot n\cdot(n-3)\,,$$

$$2m\cdot(2m-6)=4n\cdot(4n-12)\,,$$

$$((2m-3)+3)\cdot((2m-3)-3)=((4n-6)+6)\cdot((4n-6)-6)\,,$$

$$(2m-3)^2-9=(4n-6)^2-36\,,$$

$$27=(4n-6)^2-(2m-3)^2\,,$$

$$27=((4n-6)-(2m-3))\cdot((4n-6)+(2m-3))\,,$$

gdzie wobec nierówności $2m-3>0$ pierwszy czynnik po prawej stronie jest mniejszy od drugiego, a wobec $4n-6>0$ drugi czynnik jest dodatni. Zatem iloczyn po prawej stronie ma postać $3\cdot 9$ lub $1\cdot 27$. Pierwszy przypadek prowadzi do

$$2m-3=\frac{9-3}{2} \qquad \text{oraz} \qquad 4n-6=\frac{9+3}{2}\,,$$

skąd

$$m=3 \qquad \text{oraz} \qquad n=3\,,$$

co jednak nie spełnia ograniczenia $m,n>3$ podanego w treści zadania (chociaż formalnie trójkąt ma cztery razy więcej przekątnych niż trójkąt, bo oba mają po zero przekątnych).

W drugim przypadku otrzymujemy

$$2m-3=\frac{27-1}{2} \qquad \text{oraz} \qquad 4n-6=\frac{27+1}{2}\,,$$

skąd

$$m=8 \qquad \text{oraz} \qquad n=5\,.$$

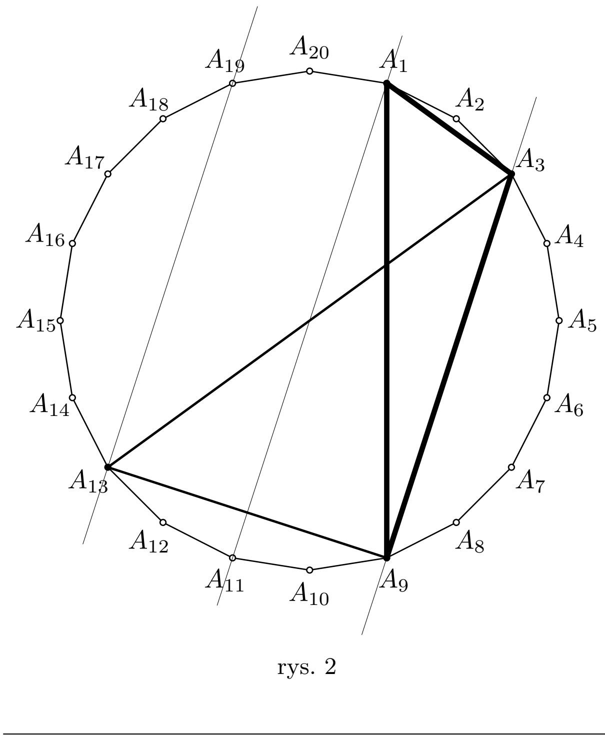
Odpowiedź : Para $(m,\,n)=(8,\,5)$ jest jedyną parą liczb spełniającą warunki zadania: Ośmiokąt (20 przekątnych) ma cztery razy więcej przekątnych niż pięciokąt (5 przekątnych).

557. Wykażemy, że pola trójkątów są równe.

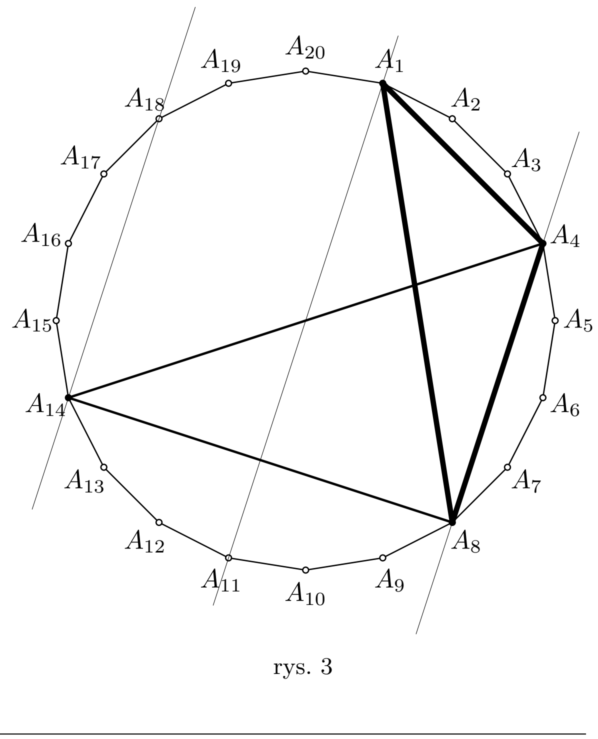
Ponieważ proste A_3A_9, A_1A_{11} i $A_{13}A_{19}$ są równoległe i rozmieszczone w równych odległościach (rys. 2), wysokość trójkąta $A_3A_9A_{13}$ o podstawie A_3A_9 jest dwa razy większa od wysokości trójkąta $A_1A_3A_9$ o tejże samej podstawie. Zatem pole trójkąta $A_1A_3A_9$ jest równe połowie pola trójkąta $A_3A_9A_{13}$.

Analogicznie pole trójkąta $A_1A_4A_8$ jest równe połowie pola trójkąta $A_4A_8A_{14}$ (rys. 3).

Ponieważ trójkąty $A_3A_9A_{13}$ i $A_4A_8A_{14}$ mają równe pola jako trójkąty przystające, także trójkąty $A_1A_3A_9$ i $A_1A_4A_8$ mają równe pola.



rys. 2



rys. 3