Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **576**, **577** i **578** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

576. Zapisz liczbę 345 używając cyfr 2, 3 i 7 (każdej tylko raz).

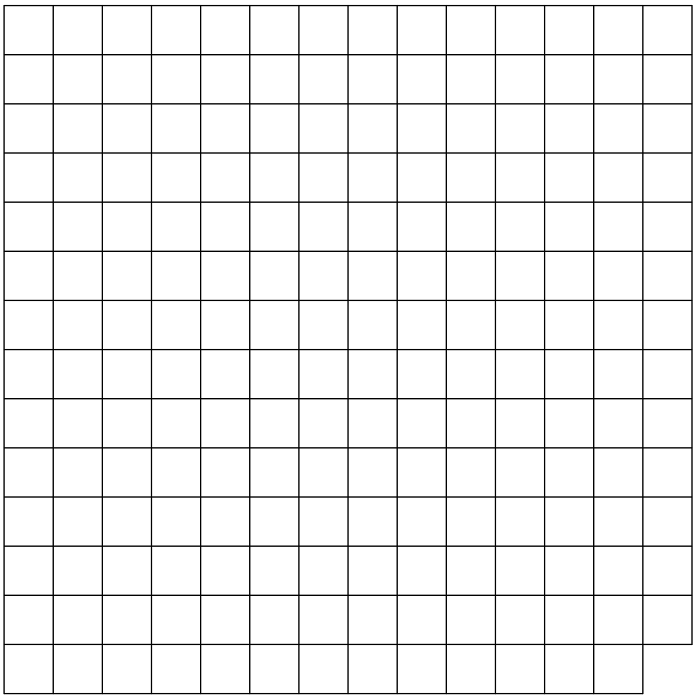
577. Zapisz liczbę 353 używając cyfr 2, 3 i 7 (każdej tylko raz).

578. Zapisz liczbę 384 używając cyfr 2, 3 i 7 (każdej tylko raz).

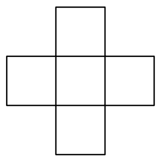
Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO
TRAPEZ
Nr 79 (39/2016)
Piątek, 30 września 2016 r.

Kolorowania, numerowania i podziały figur

579. Udowodnij, że szachownicy o wymiarach 14×14 z usuniętym polem narożnym (rys. 1) nie można wypełnić prostokątami o wymiarach 1×5 oraz pięciopolowymi krzyżykami jak na rysunku 2.



rys. 1



rys. 2

Rozwiązania zadań 571–575

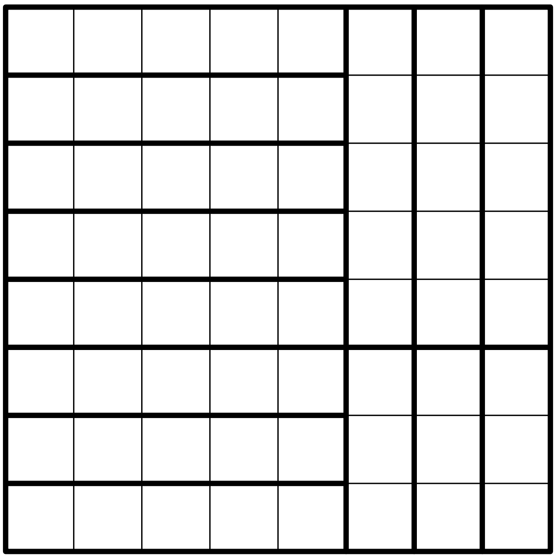
571. $312=8\cdot(2+2)!+5!=(5+8)\cdot(2+2)!$

572. $315=\dfrac{8!}{2^{2+5}}$

573. $316=2^8+\dfrac{5!}{2}$

574. $318=5\cdot 8^2-2$

575. *Sposób I:* Zauważmy, że szachownicę o boku 8 można pokryć 14 prostokątami o wymiarach 1×5 jak na rysunku 3, gdzie przedstawiono pokrycie 11 prostokątami 1×5 oraz 3 prostokątami 1×3. Aby wykazać, że pokrycie mniejszą liczbą prostokątów nie jest możliwe, rozważmy ponumerowanie pól jak na rysunku 4. Ponieważ przy takim ponumerowaniu występuje 14 pól z numerem 3, a każdy prostokąt 1×5 pokrywa tylko jedno takie pole, wnioskujemy stąd, że użycie 14 prostokątów do pokrycia kwadratu jest konieczne.



rys. 3

1	2	3	4	5	1	2	3
2	3	4	5	1	2	3	4
3	4	5	1	2	3	4	5
4	5	1	2	3	4	5	1
5	1	2	3	4	5	1	2
1	2	3	4	5	1	2	3
2	3	4	5	1	2	3	4
3	4	5	1	2	3	4	5

rys. 4

Sposób II: Ponumerujmy pola szachownicy jak na rysunku 5. Wówczas pól z liczbami 1, 2, 3, 4, 5 jest odpowiednio 16, 16, 16, 8 i 8. Gdyby dało się pokryć szachownicę 13 prostokątami 1×5, to jedno (i tylko jedno) pole byłoby pokryte dwukrotnie. Zauważmy, że każdy prostokąt pokrywa 5 pól z takim samym numerem lub po jednym polu każdego rodzaju. Stąd wniosek, że liczby pól każdego z rodzajów pokrytych prostokątami dają przy dzieleniu przez 5 takie same reszty, jeśli uwzględniać w tych rachubach krotności pokrycia. Jednak przy tylko jednym polu pokrytym dwukrotnie, nie jesteśmy w stanie uzyskać reszt 1, 1, 1, 3 i 3, jakie dają przy dzieleniu przez 5 liczby poszczególnych rodzajów pól.

1	2	3	4	5	1	2	3
1	2	3	4	5	1	2	3
1	2	3	4	5	1	2	3
1	2	3	4	5	1	2	3
1	2	3	4	5	1	2	3
1	2	3	4	5	1	2	3
1	2	3	4	5	1	2	3
1	2	3	4	5	1	2	3

rys. 5

4	4	4	−6	−6	4	4	4
4	4	4	−6	−6	4	4	4
4	4	4	−6	−6	4	4	4
−6	−6	−6	9	9	−6	−6	−6
−6	−6	−6	9	9	−6	−6	−6
4	4	4	−6	−6	4	4	4
4	4	4	−6	−6	4	4	4
4	4	4	−6	−6	4	4	4

rys. 6

Sposób III: Wpiszmy w pola szachownicy liczby jak na rysunku 6. Wówczas każdy prostokąt 1×5 pokrywa pola o sumie wpisanych liczb równej 0, a suma wszystkich liczb wpisanych w pola szachownicy jest równa 36. Gdyby dało się pokryć szachownicę tak, aby tylko jedno pole było pokryte dwukrotnie, to w tym polu musiałaby znajdować się liczba –36. A pola z taką liczbą nie ma.