Łamigłówki i zadania na weekend

Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO
TRAPEZ
Nr 82 (42/2016)
Piątek, 21 października 2016 r.

W łamigłówkach **589**, **590**, **591** i **592** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

589. Zapisz liczbę 61 używając cyfr 2, 4 i 5 (każdej tylko raz).

590. Zapisz liczbę 69 używając cyfr 2, 4 i 5 (każdej tylko raz).

591. Zapisz liczbę 600 używając cyfr 2, 4 i 5 (każdej tylko raz). Podaj dwa istotnie różne rozwiązania.

592. Zapisz liczbę 696 używając cyfr 2, 4 i 5 (każdej tylko raz). Podaj dwa istotnie różne rozwiązania.

Kolorowania, numerowania i podziały figur

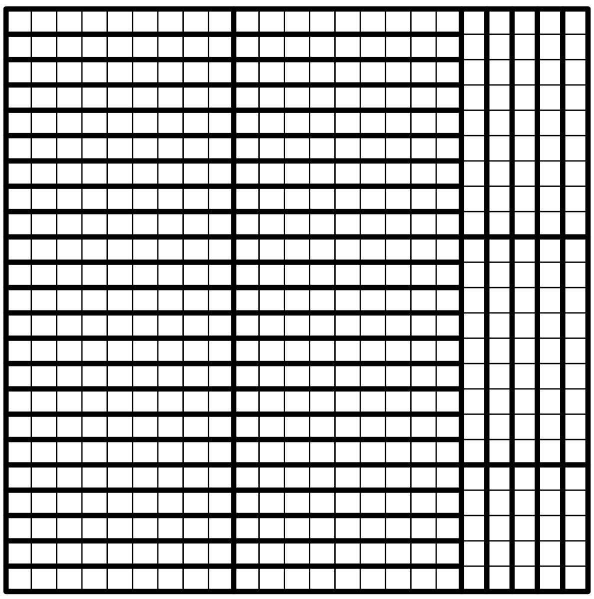
593. Kwadrat o boku 28 podzielono na kwadraty jednostkowe zwane dalej polami. Ile najwięcej prostokątów o wymiarach 1×11 można umieścić w kwadracie w taki sposób, że każdy prostokąt pokrywa 11 pól, a przy tym prostokąty na siebie nie nachodzą?

Rozwiązania zadań 584–588

584. $2016=\dfrac{7!\cdot\sqrt{4}}{5}$ **585.** $2040=5!\cdot(4!-7)$

586. $2187=\left(5-\sqrt{4}\right)^7=\sqrt{(5+4)^7}$ **587.** $2281=7^4-5!$

588. *Sposób I:* Zauważmy, że szachownicę o boku 23 można pokryć 61 prostokątami o wymiarach 1×9 jak na rysunku 1, gdzie dla czytelności rysunku przedstawiono pokrycie 56 prostokątami 1×9 oraz 5 prostokątami 1×5 (te ostatnie wystarczy odpowiednio przedłużyć).



rys. 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5
2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6
3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7
4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8
5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1
7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2
8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3
9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4
1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5
2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6
3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7
4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8
5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1
7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2
8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3
9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4
1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5
2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6
3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7
4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8
5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

rys. 2

Aby wykazać, że pokrycie mniejszą liczbą prostokątów nie jest możliwe, rozważmy ponumerowanie pól jak na rysunku 2. Ponieważ przy takim ponumerowaniu występuje $5+14+23+14+5=61$ pól z numerem 5, a każdy prostokąt 1×9 pokrywa tylko jedno takie pole, wnioskujemy stąd, że użycie 61 prostokątów do pokrycia kwadratu jest konieczne.

Sposób II: Wpiszmy w pola szachownicy liczby jak na rysunku 3. Wówczas każdy prostokąt 1×9 pokrywa pola o sumie wpisanych liczb równej 0, a suma wszystkich liczb wpisanych w pola szachownicy jest równa 400. Jeżeli pokryjemy szachownicę prostokątami 1×9, to suma liczb wpisanych w pola powtórnie pokrywane będzie równa –400. Osiągnięcie takiej sumy wymaga co najmniej 20 pól (z liczbami –20). Skoro w co najmniej 20 przypadkach prostokąt będzie pokrywał pole pokryte już wcześniej, to liczba wszystkich pól pokrytych przez prostokąty po uwzględnieniu krotności pokrycia wyniesie co najmniej $23^2+20=549=9\cdot 61$. Stąd wniosek, że pokrycie kwadratu wymaga użycia co najmniej 61 prostokątów.

Ponieważ na rysunku 1 pokazaliśmy, jak uzyskać pokrycie 61 prostokątami, liczba 61 jest najmniejszą liczbą prostokątów o wymiarach 1×9, jakie trzeba wykorzystać do pokrycia kwadratu o boku 23 w sposób zgodny z warunkami zadania.

16	16	16	16	16	−20	−20	−20	−20	16	16	16	16	16	−20	−20	−20	−20	16	16	16	16	16
16	16	16	16	16	−20	−20	−20	−20	16	16	16	16	16	−20	−20	−20	−20	16	16	16	16	16
16	16	16	16	16	−20	−20	−20	−20	16	16	16	16	16	−20	−20	−20	−20	16	16	16	16	16
16	16	16	16	16	−20	−20	−20	−20	16	16	16	16	16	−20	−20	−20	−20	16	16	16	16	16
16	16	16	16	16	−20	−20	−20	−20	16	16	16	16	16	−20	−20	−20	−20	16	16	16	16	16
−20	−20	−20	−20	−20	25	25	25	25	−20	−20	−20	−20	−20	25	25	25	25	−20	−20	−20	−20	−20
−20	−20	−20	−20	−20	25	25	25	25	−20	−20	−20	−20	−20	25	25	25	25	−20	−20	−20	−20	−20
−20	−20	−20	−20	−20	25	25	25	25	−20	−20	−20	−20	−20	25	25	25	25	−20	−20	−20	−20	−20
−20	−20	−20	−20	−20	25	25	25	25	−20	−20	−20	−20	−20	25	25	25	25	−20	−20	−20	−20	−20
16	16	16	16	16	−20	−20	−20	−20	16	16	16	16	16	−20	−20	−20	−20	16	16	16	16	16
16	16	16	16	16	−20	−20	−20	−20	16	16	16	16	16	−20	−20	−20	−20	16	16	16	16	16
16	16	16	16	16	−20	−20	−20	−20	16	16	16	16	16	−20	−20	−20	−20	16	16	16	16	16
16	16	16	16	16	−20	−20	−20	−20	16	16	16	16	16	−20	−20	−20	−20	16	16	16	16	16
16	16	16	16	16	−20	−20	−20	−20	16	16	16	16	16	−20	−20	−20	−20	16	16	16	16	16
−20	−20	−20	−20	−20	25	25	25	25	−20	−20	−20	−20	−20	25	25	25	25	−20	−20	−20	−20	−20
−20	−20	−20	−20	−20	25	25	25	25	−20	−20	−20	−20	−20	25	25	25	25	−20	−20	−20	−20	−20
−20	−20	−20	−20	−20	25	25	25	25	−20	−20	−20	−20	−20	25	25	25	25	−20	−20	−20	−20	−20
−20	−20	−20	−20	−20	25	25	25	25	−20	−20	−20	−20	−20	25	25	25	25	−20	−20	−20	−20	−20
16	16	16	16	16	−20	−20	−20	−20	16	16	16	16	16	−20	−20	−20	−20	16	16	16	16	16
16	16	16	16	16	−20	−20	−20	−20	16	16	16	16	16	−20	−20	−20	−20	16	16	16	16	16
16	16	16	16	16	−20	−20	−20	−20	16	16	16	16	16	−20	−20	−20	−20	16	16	16	16	16
16	16	16	16	16	−20	−20	−20	−20	16	16	16	16	16	−20	−20	−20	−20	16	16	16	16	16
16	16	16	16	16	−20	−20	−20	−20	16	16	16	16	16	−20	−20	−20	−20	16	16	16	16	16

rys. 3